

研究種目：若手研究（B）  
 研究期間：2006～2008  
 課題番号：18740065  
 研究課題名（和文） 完全非決定的定常過程の時間依存構造の解明  
 研究課題名（英文） Study on the time-dependence structure of  
 completely nondeterministic stationary processes  
 研究代表者  
 笠原 雪夫（KASAHARA YUKIO）  
 北海道大学・大学院理学研究院・学術研究員  
 研究者番号：10399793

研究成果の概要：定常過程、正確に言うと弱定常過程ですが、これは記憶を持つ確率過程（時間と共に変動する偶然量の数学的モデル）で、予測問題を含めて、過去と未来の間の依存関係が主な研究対象になります。私は特に、局所的な時間発展を支配する偏相関係数と呼ばれる量に興味があります。本研究では、完全非決定性という性質に着目し、それに付随する特性量を用いた表現や漸近挙動の特徴付けなど、偏相関係数に関連する幾つかの結果が得られました。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	700,000	0	700,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	240,000	2,740,000

研究分野：確率過程の予測理論、時系列解析、関数論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：定常過程、偏相関係数、完全非決定性、単位円上の直交多項式

## 1. 研究開始当初の背景

従来の研究では、定常過程の有限予測問題に対する新しい解析手法を開発して、それを時系列解析、確率解析、金融工学などの様々な問題に応用していたのですが、その一連の研究の中で、偏相関係数などの時間依存構造

を反映する幾つかの重要な量が美しい表現を持つことを発見しました。その現象は、背後に何らかの仕組みが存在することを示唆しており、また、完全非決定性に起因すると予想されました。これを明らかにすることを主な目標にして、本研究課題を申請しました。

## 2. 研究の目的

完全非決定性は、定常過程の過去全体と未来全体がある種の（線形独立性に近く、通常の意味よりずっと弱い）独立性を持つことですが、これは、定常過程に付随する外関数がそれ自身の偏角だけで決まることと同等であることが知られています。従って、原理的には、その偏角を特徴付ける関数の言葉で、すべてが記述できることとなります。

本研究の主な目的は、有限予測問題に関連する種々の量と偏角関数との間の関係を明確に記述することです。これは例えば、偏相関係数の漸近挙動を偏角関数の言葉で表現するというようなことです。

定常過程の有限予測問題は単位円上の直交多項式と密接に関係しており、それを踏まえると、偏角で決まる関数に付随する直交多項式の構造を明らかにすることが本研究の主な目的であると言えます。

## 3. 研究の方法

(1) 従来の研究で開発した手法を整理して、完全非決定性の条件の下で一般的な議論ができるようにしました。そこでは、予測そのものを表現する予測公式を、予測誤差に対するものに作り変えました。

(2) 偏相関係数の漸近挙動に関連する結果である **Baxter** の定理と **Szego** の強収束定理に取り組みました。そこでは、予測誤差の展開定理を利用して、偏角関数の性質と外関数の性質との関連を調べました。

(3) 偏相関係数の表現定理の背後にある仕組みを明らかにするため、**Nehari** の問題を起点にして議論を展開しました。これは1つの発想の転換で、与えられた外関数の偏角関数を考えるのではなく、偏角関数を先に与えて、そこから直接的に偏相関係数を調べました。

## 4. 研究成果

(1) 従来の研究で開発した有限予測問題に対する解析手法にはある技術的な仮定が必要でしたが、この問題を解消して、完全非決定性の仮定の下で、簡明な議論が展開できるようになりました。そこで得られた予測公式は、**Seghier** の予測問題の離散時間版に相当するものを解決しています。また、偏相関係数の表現定理を偏角関数の **Fourier** 係数の言葉を用いて一般化しましたが、これは、偏相関係数とスペクトル測度の間の1対1対応を明示的に表現するものと見なせます。このような基本的な結果は、応用において重要な

役割を果たします。

(2) **Baxter** の定理と **Szego** の強収束定理を偏角係数の言葉で特徴付けました。これらの定理は、単位円上の直交多項式のスペクトル理論における中心的な結果で、長年に亘って研究されてきたものですが、本研究における結果は、そこに全く新しい視点を導入しています。また、本来の定理と同様、非常に美しい結果です。

(3) 偏相関係数の時間発展が、偏角係数列のシフトに対応することを明らかにしました。これは、偏相関係数と偏角係数を1対1に対応させる写像と、数列に関するシフト作用素が可換であるという結果であり、完全非決定性が、偏相関係数の漸近挙動のみに依存することを示唆しています。この結果は、**Nehari** の問題と深く関係しています。逆向きのシフトに対応する、偏角係数列の延長の問題が、今後の課題になります。

完全非決定的定常過程の有限予測問題、および、それに対応する直交多項式の問題を扱った文献は、海外でもほとんどありません。従って、本研究で得られた結果は、大変特色のあるものになっていると思います。

(4) 連続時間の予測問題における予測係数に対する **Baxter** 型不等式を証明しました。これは、分数 Brown 運動を一般化した定常増分過程に対して、有限予測係数と無限予測係数の差の正則変動関数による重み付き平均の漸近挙動を明らかにしたものです。連続時間の確率過程に対する有限予測問題は、それ自身扱いが難しく、このような結果を得ている先行研究は見当たりません。証明には、従来の研究で開発した解析手法を用います。

(5) 時系列データに欠損がある場合の予測問題についても研究し、先行研究で知られている定常時系列の予測問題における双対性を、非定常の場合に拡張しました。これを定常時系列に適用すると、過去のデータの中に欠損がある場合の予測問題を、いわゆる補完の問題と同様に扱うことができます。この場合は、定常時系列それ自身の dual ではなく、定常時系列の過去の部分の dual を用います。後者は、線形代数と定常時系列に関する標準的な知識があれば簡単に求めることができます。しかし、既存の方法でそれを求めるのは困難であると思われます。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- (1) Yukio Kasahara, Mohsen Pourahmadi  
and Akihiko Inoue,  
Duals of random vectors and processes  
with applications to prediction  
problems with missing values,  
Statistics & Probability Letters,  
印刷中, 査読有り
- (2) Akihiko Inoue, Yukio Kasahara  
and Punam Phartyal,  
Baxter's inequality for fractional  
Brownian motion-type processes with  
Hurst index less than  $1/2$ ,  
Statistics & Probability Letters,  
78, 2889-2894, 2008, 査読有り

[学会発表] (計5件)

- (1) 笠原雪夫,  
Orthogonal polynomials  
on the unit circle associated  
with a rigid function (2),  
実解析学シンポジウム2008,  
平成20年11月9日, 山口大学
- (2) 笠原雪夫,  
OPUC under the Levinson-Mckean  
condition, Verblunsky coefficients  
and phase coefficients,  
日本数学会, 秋季総合分科会,  
統計数学分科会,  
平成20年9月24日, 東京工業大学
- (3) 笠原雪夫,  
A duality relation  
in some prediction problems,  
実解析学シンポジウム2007  
平成19年10月20日, 大阪教育大学
- (4) 笠原雪夫,  
定常過程の予測問題と直交多項式,  
第46回実関数論・函数解析学  
合同シンポジウム,  
平成19年8月8日, 九州大学
- (5) 笠原雪夫  
Orthogonal polynomials  
on the unit circle associated  
with a rigid function,  
実解析学シンポジウム2006,  
平成18年10月28日, 弘前大学

6. 研究組織

- (1) 研究代表者  
笠原 雪夫 (KASAHARA YUKIO)  
北海道大学・大学院理学研究院・学術研究員  
研究者番号: 10399793
- (2) 研究分担者  
なし
- (3) 連携研究者  
なし