様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　４月３０日現　在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：2006～2008
課題番号：18740068
研究課題名（和文）　ＫｄＶ方程式に関連する方程式の初期値問題の可解性と解の性質
研究課題名（英文）　Solvability and properties of solutions of the Cauchy problem of equations related to the KdV equation

研究代表者
津川　光太郎(Tsugawa Kotaro)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：70402451

研究成果の概要：
KdV 方程式に関連する分散型方程式の初期値問題について調和解析的手法を用いて研究した。Ostrovsky 方程式は、KdV 方程式に系の回転によるコリオリ力を表す項を付加した方程式である。この方程式に対してフーリエ制限ノルム法を適用することにより時間大域的適切性および回転パラメータを零に極限を取ったときの解の収束性を証明した。また、|u|^2 というタイプの非線形項を持つシュレディンガー方程式に対する滑らかさの低い関数空間上での時間局所適切性を証明した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,500,000	0	1,500,000
２００７年度	1,000,000	0	1,000,000
２００８年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総　計	3,500,000	300,000	3,800,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：関数方程式、非線形、分散型方程式

１．研究開始当初の背景

非線形分散型方程式の初期値問題に対する調和解析的手法による研究は、ここ 15 年目覚しい発展を見た。1993 年の Bourgain によるフーリエ制限ノルムの導入、1998 年の Tao 等のグループによる I-method の導入により、様々なタイプの非線形分散型方程式に対して、これらの手法が応用されてきた。その中でも KdV 方程式は最も代表的な方程式である。
KdV 方程式は、運河のような底の浅い水の表面の波長の長い波を表す方程式として導出され、その後、プラズマ中のイオン波など、より一般的な物理現象に現れる分散性が弱い波動現象を表す代表的な方程式である事が分かった。この方程式は次の様な非常に特徴的な性質を持っている。線形の部分は高周波の波ほど速く進むという分散性の効果を持つ。非線形の部分は一般的に安定性を弱める働きをする、しかし。この方程式は線形と非線形の項の釣り合いにより、形を変えずに進む安定な孤立波解（ソリトン）を持つ。線形方程式は古くから研究され既に多くの事

が分かっている。一方、非線形が強い場合には複雑過ぎて数学的な結果が得られない。それ故、その中間に属するKdV方程式は非常に興味深い研究課題であり、実際多くの研究が行われている。

KdV 方程式に関連する多くの方程式が知られている。以下に述べるOstrovsky方程式やKawahara方程式などである。これらもKdV方程式と同様に興味深い方程式であるが、あまり研究が行われていない。それには次の様な理由がある。KdV 方程式は可積分系であり無限個の保存量の存在が知られている。この性質は方程式の持つ代数的な構造が本質的に関係しており、これを利用して代数的な手法、逆散乱法など様々なアプローチからの研究が可能である。しかし、代数は「等式」的な性質を持つため、物理的には影響が少ないだろうと思われる項を付け加えただけでも、代数的な手法は適用出来なくなってしまう。しかし、解析的手法は「不等式」による評価が本質的となるため、影響の少ない摂動項が付いてもそれが十分小さいと評価出来れば、適用可能である場合が多い。近年発展してきた調和解析的手法の適用により大きな成果が得られるであろうと期待される。

２．研究の目的

これらのKdV方程式に関連する方程式の初期値問題の解について、代数的な性質を用いずに解析的手法のみで、KdV 方程式と同様の性質が得られるか？または、どのような違いが現れるのか？を明らかにし、KdV 方程式とその他の関連する方程式の違いを比較して、KdV 方程式の本質を理解する事が目的である。

まずOstrovsky方程式について考える。この方程式はKdV方程式と同様の条件下で、地球の自転などにより遠心力のような外力が加わった場合の表面波を記述する方程式であり、KdV 方程式に対して線形の積分項を付け加えた形になっている。初期値問題の時間大域的可解性は既に研究されているが，そのための条件はKdV方程式に比べて強いものである。この条件が本質的なものなのか、あるいはKdVと同じ条件下で解けるのかは興味深い問題である。また、Ostrovsky 方程式はソリトン解を持つが、その安定性については良く分かっていない。遠心力の影響が小さい場合には、物理的には KdV 方程式近いため、同様に安定であると推測出来る。一方，遠心力の影響を強くした場合には不安定化するのか？そして、その場合にはどのように安定性が崩れていくのか？これらは、物理的にも興味深い問題である。数値計算を行い、その結果から予測し、数学的な証明を与えていく。

次に，Kawahara方程式について述べる。これも水の表面波を記述する方程式で、KdV 方程式に高階の微分項を加えた形になっている。これにより，KdV より高い分散効果が期待できるが，Ostrovsky 方程式同様にソリトン解の安定性、特異極限問題が考えられる。

KdV 方程式自身の研究は数多い。本研究は，KdV 方程式を直接研究刷るのでは無く，関連する方程式の研究を行いKdV方程式と比較し、また、特異極限問題のようにKdV方程式に近づけた場合の解の様子を調べることにより、KdV 方程式の本質を調べる点が独創的な点である。

３．研究の方法

まず、最新の数学的手法や物理的結果を知るために、他の研究者との交流が重要である。このために、テキサスで行われた AIMS International conference に参加し、Ostrovsky 方程式に関する自分の研究成果を発表し、他の水の表面波に関する研究者たちと議論を交わした。上海の華東師範大学において流体の研究をしているYong Zhou氏を訪問し、彼の主催する研究集会に参加し、他の流体の研究者と最新の結果に関する情報交換を行った。フランスの Orsay University の Analyse Numerique et Equations aux Derivees Partielles セミナーに参加し私の得た結果を発表するとともに、偏微分方程式の背景にある物理現象に詳しく、可解性などの数学的基礎理論にも精通している J. Ginibre 氏を訪問し，物理実験の結果などから，解の挙動はどのように予測されるか教えていただいた。また、この分野において独創的な研究を行っている研究者達に、私が主催者の一人となっている名古屋大学の微分方程式セミナーで講演してもらった。そして、名古屋大学の杉本充氏と共に、研究代表者として研究集会 Nagoya Workshop on Differential Equationsを開催した。この研究集会においては海外の研究者も招いた。これにより、フーリエ制限ノルム法の最新の研究動向を知ることが出来た。非線形シュレディンガー方程式の研究に関しては、この分野の若手実力者である京都大学の岸本氏を名古屋大学の微分方程式セミナーに来て頂いたりして、議論を重ね共同研究を行った。

４．研究成果

初めに、Ostrovsky方程式に関する研究成果を述べる。底の浅い水の表面波などKdV方程式と同様の物理モデルについて、地球の自転などの系の回転による影響を考慮した場合を記述する方程式であるOstrovsky方程式

について研究した。既存の結果では、KdV方程式よりも強い仮定の下でしか適切性が示されていなかったが、これを拡張しKdV方程式とほぼ同条件下で示すことに成功した。この結果により、解の低周波成分が可解性に果たす役割もより明確になった。また、物理的考察から、回転の影響による変数を零に極限を取るとOstrovsky方程式の解はKdV方程式の解に収束すると予想されるが、既存の結果ではより強い仮定の下での部分的な結果しか得られていなかった。私は、上記の可解性の結果から得られた精密な評価式を応用することによって、L^2という自然な空間において収束性を示す事に成功した。この研究の重要な部分は、フーリエ制限ノルムを用いた双線形評価式である。この手法はこれまでにも様々な方程式の研究に用いられて来たが、本研究成果のように方程式の線形部分のパラメータについて極限を取る場合に適用するのは難しいと思われていた。それは、ノルムの重み関数が方程式の線形部分に依存する形に成っているからである。本研究成果は、フーリエ制限ノルムを用いた研究の応用範囲を広げることを可能にした点において意義深い。

次に非線形シュレディンガー方程式に関する成果を述べる。調和解析的手法を用いて|u|^2という二次の非線形項を持つシュレディンガー方程式の滑らかさの低いクラスでの時間局所可解性について研究した。シュレディンガー方程式は、KdV方程式と同じく、非線形分散型方程式と呼ばれるグループに属し、特に、|u|^2というタイプの非線形項を持つ場合には、エネルギーカスケードと呼ばれる、解の高周波成分から低周波成分へのエネルギーの流れが問題になるなど、本研究テーマのであるKdV方程式やKawahara方程式との共通点が多い。本研究では、解を構成するノルムに以下の二点の工夫をしたことにより、既知の結果よりはるかに低い滑らかさの仮定の下での可解性を示す事が出来た。一つ目は、フーリエ空間での低周波成分に修正を加えた点。二つ目は、方程式の線形部分から決定されるブルガンの重み関数と呼ばれる部分に対して、非線形項の影響を考慮して修正を加えた点である。これにより既存の結果を拡張することに成功し、より滑らかさの低い関数空間上で適切性を示すことが出来た。また、反例も上げることにより、有る意味ここで得られた結果が最良のものであることも示した。証明の重要な部分は、新しく構成したノルムを用いた双線形評価式である。この評価式は既存のものに比べてより精密なものであるため、適切性以外の解の性質の研究にも役立つ可能性がある。また、ここで用いたノルムの新しい構成法はKdV方程式やKawahara方程式などの他の非線形分散型方程式に対する研究にも応用が可能であると予想される。Bourgainによるフーリエ制限ノルムの導入以降、このノルムを直接用いた研究はさかんに行われているが、この研究成果のように、ノルムの重み関数に修正を加える手法を用いた研究は少ない。本研究の成功により、今後は他の方程式に対しても応用されていくと思われる。その第一歩として本研究の果たした役割は意義深い。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① 津川光太郎, Global well-posedness for the KdV equations on the real line with low regularity forcing terms. Commun. Contemp. Math. 査読有り, 8 (2006), no. 5, pp.681-713.

〔学会発表〕（計　14　件）

① 津川光太郎, Remark on the time local well-posedness of the 1D Zakharov system, 2009年3月29日, 日本数学会年会, 東京大学

② 津川光太郎, Remark on the time local well-posedness of the 1D Zakharov system, 2009年3月11日, 臨時セミナー, パリ南大学

③ 津川光太郎, 非線形分散型方程式の適切性とフーリエ制限ノルム法, 2008年12月13日, 第3回奈良偏微分方程式研究会, 奈良女子大

④ 津川光太郎, Well-posedness for the Schrodinger-improved Boussinesq system in one space dimension, 2008年9月27日, 日本数学会秋期総合分科会, 東京工業大学

⑤ 津川光太郎, Well-posedness and weak rotation limit for the Ostrovsky equation, 2008年7月14日, Workshop on Partial Differential Equations, 華東師範大学

⑥ 津川光太郎, Well-posedness for quadratic nonlinear Schrodinger equations, 2008年6月13日, 解析セミナー, 愛媛大学

⑦ 津川光太郎, Well-posedness and weak rotation limit for the Ostrovsky equation, 2008年5月18日, 7th AIMS International conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, テキサス大学

⑧ 津川光太郎, A bilinear estimate related to the Dirac-Klein-Gordon equations and the wave maps in one space dimension, 2007年11月1日, Linear and Nonlinear Waves, No.5, ピアザ淡海

⑨ 津川光太郎, Low regularity well-posedness of systems of transport equations, 2007年10月19日, 京都大学NLPDE seminar, 京都大学

⑩ 津川光太郎, 非線形波動方程式の時間局所適切性, 2007年6月1日, 東京理科大学理工学部数学科談話会, 東京理科大学理工学部

⑪ 津川光太郎, Well-posedness and weak rotation limit for the Ostrovsky quation, 2006年12月10日, 第４回浜松偏微分方程式研究集会, 静岡大学工学部

⑫ 津川光太郎, Well-posedness and weak rotation limit for the Ostrovsky quation, 2006年11月20日, Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 22「Nonlinear wave equations」, Sapporo Guest House

⑬ 津川光太郎, Well-posedness and weak rotation limit for the Ostrovsky quation, 2006年9月22日, 日本数学会2006年度秋季総合分科会, 大阪市立大

⑭ 津川光太郎, A remark on Koch-Tzvetkov type estimates, 2006年5月24日, 研究集会「非線形分散型・波動方程式における解の漸近挙動」, 数理解析研究所

６．研究組織

(1)研究代表者

津川　光太郎 (Tsugawa Kotaro)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：70402451