

平成21年5月22日現在

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18740074

研究課題名 (和文) 非線形分散型方程式の対称性と解の構造の研究

研究課題名 (英文) Investigation of symmetries and structure of solutions for nonlinear dispersive equation

研究代表者

高岡 秀夫 (TAKAOKA HIDEO)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：10322794

研究成果の概要：

非線形波動現象を記述する非線形分散型方程式において、解の構造は非線形相互作用によって引き起こされる特異性により特徴付けられる。このような特異性の考察を、非線形評価式を構成することによって捉え、解の一意存在、データの連続依存性といった初期値問題の適切性の問題、さらに散乱問題などの解の大域挙動の研究を、幾つかの方程式に対して行った。その結果、初期値問題の適切性と解の大域性に関する技術と理論を進展させた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,300,000	0	1,300,000
2007年度	1,200,000	0	1,200,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	300,000	3,800,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式、関数解析

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 偏微分方程式論において、解の一意存在、安定性といった初期値問題の適切性が数学的にどのように実現されるかを調べることは重要な課題である。エネルギー空間は数学的にも物理的にも自然な関数空間であり、更に解の大域存在を示す上で重要な関数空間である。一方、エネルギー空間よりも広い関数空間において初期値問題の適切性や解

の大域挙動を調べることも重要な問題となる。

(2) 非線形分散型方程式に対しては、関数解析学に加えて、J. Bourgain のフーリエ制限ノルム法による研究に代表されるように、最近は調和解析学による強力な手法を用いた研究が行われ、エネルギー空間よりも広い弱解の関数空間において初期値問題の適切性や解の大域挙動に関する研究を可能とし

た。この研究は、力学的立場から不変測度の構成を考えたり、シンプレクティック構造を持つハミルトン形式の non-squeezing property を調べたりする際に必須であり、その重要性は指摘されている。フーリエ制限ノルム法は、非線形相互作用による特異性をフーリエ空間において解析する手法である。研究代表者は、フーリエ制限ノルム法による解析手法、およびフーリエ空間におけるエネルギー輸送の観点から解の先験評価式の成果をあげており、この研究方法論を進展させることが研究動機であった。

## 2. 研究の目的

(1) 本研究の目的は、関数解析学的手法に加えて、調和解析学的手法を用いた解析の立場から、非線形相互作用の特異性に新たな研究方法論を追求することである。

(2) 非線形分散型方程式においては、方程式の分散性と非線形相互作用による特異性がどのように釣り合うかという問題がある。この釣り合いが保たれる臨界的な状況及びそれを越えたとき何が起こるかという問題も興味深い。本研究では、フーリエ空間において非線形相互作用の特異性の解析を試みることに加えて、その観点から解の大域的評価式の考察を取り込み、時間局所のおよび大域的適切性に関する研究対象を種々の方程式に広げるといった、方法論の汎用性の拡大も研究目的とした。

(3) 研究課題として、非線形シュレディンガー方程式の初期値問題に対する適切性と解の時間大域的性質の研究、さらにベンジャミン・小野方程式のソリトン解の安定性の問題を扱った。非線形シュレディンガー方程式に対しては、時間大域解が捉ええる関数空間の解明を研究目的とし、ベンジャミン・小野方程式に対しては、ソリトン解の漸近的安定性の解明を目指した。

## 3. 研究の方法

(1) 非線形相互作用をフーリエ空間において解析する場合、非線形相互作用による振動数の違いに応じて共鳴・非共鳴現象といった現象が観察できる。方程式の幾何学的構造から誘導される関数空間において、これら現象を解析し、解の構造を調べることを研究方法とする。

(2) 非線形におけるフーリエ空間相互作用はフーリエ波数において転換されることを鑑みて、このエネルギー輸送を時間大域的に考察することも研究方法とする。この方法では、方程式の保存則による対称性が成り立たない場合でも有効であることが方法上の特色である。

(3) フーリエ空間に加えて、通常の物理空間において解の大域的性質を特徴付ける、大域評価式の構成も研究の方法とした。大域評価式の普遍的扱いはできないが、解の主要部分に対するエネルギー集中過程を解析することが方法上の特色である。

## 4. 研究成果

本研究課題の主な成果について幾つか挙げる。

(1) 空間 2 次元の場合の非線形シュレディンガー方程式に対し、エネルギークラスよりも広い関数空間（微分階数については  $1/2$  に階のソボレフ空間）において時間大域評価式を構成し、時間大域解を得ることに成功した。  
①定理. 空間 2 次元の非線形シュレディンガー方程式の初期値問題は、ソボレフ指数  $s > 1/2$  のソボレフ空間において時間大域的に適切である。

②これは、J. Bourgain が 1998 年に提出した結果の改良である。空間次元が 2 次元以上の場合には、1 次元の場合には存在しない角度方向による相互作用の考察が必要となる。この相互作用による特異性は、フーリエ空間における共鳴部分に相当した。共鳴部分の解析には、解のフーリエ波数を角度方向に分解し、その相互作用を双線形評価式によって成し遂げた。データの滑らかさについて、臨界的な問題は未解決だが、証明に用いた双線形ストリッカーズ評価では、研究の新しい発見に至った。

(2) 周期境界値条件の非線形シュレディンガー方程式に対して、フーリエ波数空間におけるエネルギーが波数間で転換され輸送される過程を大域的に解析した。

①定理. 周期境界値条件、空間 2 次元の非線形シュレディンガー方程式の初期値問題を考える。エネルギークラスよりも広い関数空間において、解のノルムが時間増大する大域解が存在する。

②フーリエ空間における大域評価式の本質は、非線形相互作用による低周波から高周波へのエネルギー転換を制御することであるが、そのエネルギーの具体的やり取りの仕組

みは分かっていた。力学系理論の観点から、実際にエネルギー転換される時間大域解を構成した。この成果は、フーリエ空間相互作用における、共鳴・非共鳴現象において、共鳴部分から特異性の解析を研究する過程で得られた。

(3) ベンジャミン・小野方程式の複数ソリトン解の摂動問題に対して、安定性解析を行った。

①定理. ベンジャミン・小野方程式に対し、速さの異なるソリトン解を複数配置された状況を考える。このソリトン解に摂動を与えた初期値問題は時間大域的に適切である。

②摂動が大域的単調である評価式を示した。ベンジャミン・小野方程式は非局所作用のヒルベルト変換を含む方程式であり、この点において、KdV 方程式に対する従来の理論を拡張させた。漸近的な安定性の問題は未解決であるが、今後の研究課題とした。

(4) 非線形項シュレディンガー方程式に対して、これまでに非線形散乱理論により解の大域挙動の研究を行い、本研究期間において論文調整を終了した。

①定理. 空間3次元、エネルギー臨界型の非線形シュレディンガーを考える。エネルギークラスにおいて、初期値問題は時間大域的に適切。散乱作用素が存在する。

②これは、1999年のJ. Bourgainによる球対象という条件を排除し、この方程式に対する散乱問題に最終結論を与えたものである。散乱を妨げる、解のエネルギー集中過程を解析するところでは、相互作用型のビリアル評価に基づき大域評価を構成し、フーリエ空間において解のエネルギーを評価することに成功した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

①S. Gustafson, H. Takaoka and T.-P. Tsai, Stability in  $H^{1/2}$  of the sum of K solitons for the Benjamin-Ono equation, J. of Math. Phys., 50, 013101-013101-14, 2009 (印刷中), 査読有

②J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Resonant decompositions and the I-method for the cubic nonlinear Schrödinger equation on  $\mathbb{R}^2$ ,

Discrete Contin. Dyn. Syst., 21, 665-686, 2008, 査読有

③J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in  $\mathbb{R}^3$ , Ann. of Math., 167, 767-865, 2008, 査読有

④H. Takaoka, Global analysis of nonlinear dispersive-type wave equations, Sugaku, 60, 337-351, 2008, 査読有

⑤ H. Takaoka, Bilinear Strichartz estimates and applications to the cubic nonlinear Schrödinger equation in two space dimensions, Hokkaido Math. J., 37, 861-870, 2008, 査読有

⑥J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, The energy-critical nonlinear Schrödinger equation in  $\mathbb{R}^3$  Contemp. Math., 439, 69-80, 2007, 査読有

⑦C. E. Kenig and H. Takaoka, Global wellposedness of the modified Benjamin-Ono equation with initial data in  $H^{1/2}$ , Int. Math. Res. Not., ID95702, 44pp, 2006, 査読有

[学会発表] (計7件)

①H. Takaoka, ベンジャミン・小野方程式に対するソリトン解の安定性について, 解析セミナー, 2008.12.11, 神戸大学

②H. Takaoka, Morawetz 評価式と非線形シュレディンガー方程式の散乱理論, 日本数学会北海道支部講演会, 2008.11.28, 北海道大学

③H. Takaoka, 非線形分散型波動方程式の大域解析, 日本数学会年会総合講演 2008.3.24, 近畿大学

④ H. Takaoka, Bilinear Strichartz estimates and applications to 2D NLS, Nonlinear Wave Equations, 2007.8.29, 北海道大学

⑤H. Takaoka, On the finite dimensional approximation of solution for the KdV equation on the torus, 調和解析と非線形偏微分方程式, 2006.7.5, 京都大学数理解析研究所

⑥H. Takaoka, 非線形波動方程式の波数間相互作用と解の正則性, 数学教室談話会, 2006.5.26, 神戸大学

⑦H. Takaoka, Nonsqueezing result of KdV on the torus, 解析セミナー, 2006.4.20, 神戸大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

高岡秀夫 (TAKAOKA HIDEO)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：10322794

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし