様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　６月　１日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：１８７４００７７
研究課題名（和文）時間分割近似法による経路積分の理論の構成とその応用

研究課題名（英文）Theory of path integrals by time slicing approximation and its applications

研究代表者
熊ノ郷　直人（KUMANOGO NAOTO）
工学院大学・工学部・准教授
研究者番号：４０２９６７７８

研究成果の概要：区分的に陪特性な経路を用いた時間分割近似法により、相空間（ハミルトン型）経路積分の理論を構成した。厳密に言えば、時間分割近似法が、運動量の始点と位置の終点に関して広義一様収束する、かなり一般的な汎関数のクラスを与えた。このクラスは不確定性原理にかかわらないように一部の汎関数を除外しているため、和や積という演算が自由にできる。応用として、ハミルトン型の摂動展開や準古典近似を証明した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,300,000	0	1,300,000
2007 年度	1,100,000	0	1,100,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	330,000	3,830,000

研究分野：基礎解析学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：経路積分、関数方程式、関数解析学、数理物理、振動積分、擬微分作用素、準古典近似、確率解析

１．研究開始当初の背景

1948 年、R. P. Feynman は Schrödinger 方程式の基本解の積分核を経路積分の形で表現した。経路積分はすべての経路に関する新しい和であり、Feynman は経路積分を有限次元積分の極限として説明した。この方法は現在、時間分割近似法と呼ばれる。さらに Feynman は、一般的な汎関数を振幅にもつ経路積分（Schrödinger 方程式の基本解の場合は振幅となる汎関数を 1 とする）を考え、経路空間上の新しい解析学を提案し、Lagrange 形式による量子力学の定式化を与えた。また一方で Feynman は Hamilton 型の経路積分も提案している。

しかしながら、1960 年、R. H. Cameron は経路積分に対応する完全加法的測度が数学的に存在しないことを証明した。また Hamilton 型の経路積分は、Schrödinger 方程式の基本解の場合でさえ、物理的にも不確定性原理があり、位置と運動量の経路という定義そのものに曖昧さがあり、長年の問題となっている。

２．研究の目的

こうした背景により、研究の全体構想は、完全加法的測度の代わりに Feynman の最初のアイデアである時間分割近似法を用いて経路積分の存在とその性質を数学的に証明し、経路空間上の新しい解析学を構成することである。特に、平成 18 年度～20 年度の本研究課題においては、時間分割近似法による Hamilton 型経路積分の理論の構成とその応用を中心課題とした。数学的に厳密に言えば、Hamilton 型経路積分の時間分割近似法が広義一様収束する一般的な汎関数のクラスを定義し、Hamilton 型経路積分と Riemann-Stieltjes 積分との順序交換、Hamilton 型経路積分と lim との順序交換、プランクパラメータをゼロに近づけた場合の準古典近似など、Hamilton 型経路積分で可能な演算を明確化し、同時に、Lagrange 型経路積分の理論整備を進め、Hamilton 型経路積分と比較することで時間分割近似法のメカニズムを明らかにすることが目的であった。

３．研究の方法

Hamilton 型経路積分の時間分割近似法が広義一様収束する一般的な汎関数のクラスの構成から始めた。振幅となる汎関数が 1 の場合（Schrödinger 方程式の基本解の場合）でさえ Hamilton 型経路積分は、物理的にも不確定性原理があり、位置と運動量の経路という定義そのものに曖昧さがあり、長年の論争になっている。こうした物理的論争に巻き込まれないように、私は時間分割近似法の収束の証明、つまり、数学的存在の証明だけの観点から Hamilton 型経路積分の定義をしようとした。

まず時間分割近似法の多重振動積分を Fourier 積分作用素の観点から、相関数と振幅関数に分け、振幅関数を停留位相法の観点から、主部と余りに分けた。最初は振幅となる汎関数に何も仮定せず一般とし、相関数、主部、余りの順に収束するように、汎関数に適宜、条件を加えていき、その条件をそのまま汎関数のクラスの定義とした。

余りは主部で定義され、主部は相関数のヘッセ行列式で定義され、相関数は経路の作用で定義されるので、経路はすべてに影響する。このため、経路をどう取るかが最初の重要な問題であった。試行錯誤の末、区分的に陪特性な経路を選ぶと収束が良くなることを発見した。

時間分割近似法の多重振動積分の収束に関しては、まず熊ノ郷（準）谷口の定理を拡張し、大きな次元の多重振動積分を定数の次元乗でコントロールできるように、振幅となる汎関数に条件を加えた。次に藤原の Lagrange 型の停留位相法を Hamilton 型に翻訳して、大きな次元の多重振動積分が次元によらず有界となるように、振幅となる汎関数に条件を加えた。最後に、多重振動積分が分割に関しコーシー列になるように、振幅となる汎関数に条件を加えた。そして、この条件をそのまま、汎関数のクラスの定義とした。

一般的な汎関数を振幅としてもつ Hamilton 型経路積分の時間分割近似法が、運動量の始点と位置の終点に関して広義一様収束することを証明したあとは、Hamilton 型経路積分が可能な汎関数の例や Hamilton 型経路積分と Riemann-Stieltjes 積分との順序交換定理、Hamilton 型経路積分と lim との順序交換定理、プランクパラメータをゼロに近づけた場合の準古典近似など、Hamilton 型の経路積分で可能な演算を明確化しようとした。

当初の予想通り、不確定性原理のため、Hamilton 型経路積分可能でない汎関数の例や、Riemann-Stieltjes 積分や lim と順序交換できない例が大きな問題となった。しかし、数学的に可能な部分を徐々に明らかにしていくことが、物理的には曖昧であった Hamilton 型経路積分の正しい使用法を徐々に明らかにしていくことになると考えていたので、不確定性原理にかかわらないように、条件をつけて証明した。

４．研究成果

(1)区分的に陪特性な経路を用いた時間分割近似法により、相空間経路積分（Hamilton 型経路積分）の数学的一般理論を構成した。数学的に厳密に言えば、相空間経路積分の時間分割近似法が、位置の終点と運動量の始点を変数とする関数として、広義一様収束するような一般的な汎関数のクラスを構成した。この汎関数のクラスは、不確定性原理にかかわらないように一部の汎関数を排除しているため、和と積という演算に対して閉じている。ゆえに、相空間経路積分可能な汎関数のかなり多くの例を作ることができる。応用として、不確定性原理にかかわらないように条件をつけて、相空間経路積分と Riemann 積分との順序交換定理、相空間経路積分と lim との順序交換定理を証明した。これにより、Hamilton 型の摂動展開公式を証明した。さらに、プランクパラメータをゼロに近づけた場合の Hamilton 型の準古典近似を証明した。特に、準古典近似の剰余項の評価も与えた。この結果は雑誌論文①②と学会発表①②③④⑦などで発表した。

Hamilton 型の時間分割近似法については、振幅の汎関数が 1 の場合（Schrödinger 方程式の基本解の場合）は収束を証明した研究がいくつかあったが、振幅を一般の汎関数とした一般理論はこの論文が最初である。また、

区分的に陪特性な経路は新しいアイデアであり、位置の終点と運動量の始点に関して関数として広義一様収束し、収束の点で優れている。
　今後の展望として、区分的に陪特性な経路を、近似として荒い区分的に定数となる経路に取り替えた場合、どうなるかも考えたい。また、Hamilton 型経路積分における準古典近似の第２項など、さらに可能な演算の幅を広げ、物理的には曖昧であった Hamilton 型の経路積分の正しい使用法を与えていきたい。

(2)折れ線経路を用いた時間分割近似法による Lagrange 型経路積分の理論について、雑誌論文③で多くの図を用いて解説し、学会発表⑤⑥⑧⑨⑩⑪⑫⑬で講演した。内容は以下である：折れ線経路の時間分割近似法が広義一様収束する一般的な汎関数のクラスを与えた。このクラスは和、積、平行移動、線形変換、汎関数微分に関して閉じている。また、この経路積分において、Riemann-Stieltjes 積分や lim との順序交換定理、平行移動や直交変換に関する不変性、汎関数微分に関する部分積分や Taylor 展開、微分積分学の基本定理が成立する。
　時間分割近似法については、Schrödinger 方程式の解の構成法として収束を証明した研究はあったが、振幅を一般の汎関数とした一般理論はこれが最初である。実際、L. S. Schulman の改訂版「Technique and Application of Path Integration」の pp.391 や S. Albeverio-Hoegh-Krohn の改訂版「Mathematical theory of Feynman path integrals」の pp.122-123 などで、最近の新しい理論として引用されている。
　今後の展望として、時間分割近似法による経路積分の理論を、さらに、完全加法的測度による積分の理論のような使い易い理論に近づけていきたいと思っている。

(3)Lagrange 型の経路積分の時間分割近似法で用いられる大きな次元の多重振動積分の停留位相法における第２項と剰余項についての精密な結果を、雑誌論文⑥で発表した。さらに、区分的古典経路を用いた時間分割近似法による Lagrange 型経路積分の準古典近似の第２項と剰余項についての精密な結果を雑誌論文⑤で発表した。
　振幅となる汎関数が１とした場合、この積分の形で書き下した第２項は、Schrödinger 方程式の基本解に対し、Birkhoff が与えた漸近展開の第２項がみたす微分方程式を満たす。Birkhoff の第２項を、汎関数に関して一般化したとも言っても良いだろう。
　今後の展望として、第３項以降も考えたい。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

①<u>Naoto Kumano-go</u>、Daisuke Fujiwara、
Phase space path integrals and their semiclassical approximations、
Proceedings of the 9th International Conference `Path Integrals, New Trend and Perspectives', World Scientific、
102-107 頁、2008 年、査読無

②<u>Naoto Kumano-go</u>、Daisuke Fujiwara、
Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations、
Bulletin des Sciences mathematiques 132 巻、313-357 頁、2008 年、査読有

③<u>Naoto Kumano-go</u>、Daisuke Fujiwara、
Feynman path integrals and semiclassical approximation、
RIMS Kokyuroku Bessatsu B5: Algebraic Analysis and Exact WKB Analysis for Systems of Differential Equations
(eds. Takashi Aoki, <u>Naoto Kumano-go</u> and Susumu Yamazaki)、
241-263 頁、2008 年、査読有

④<u>Naoto Kumano-go</u>、Daisuke Fujiwara、
Path integrals as analysis on path space by time slicing approximation、
PAMM. Proc. Appl. Math. Mech.、7 巻、1130101-1130102 頁、2007 年、査読無

⑤Daisuke Fujiwara、<u>Naoto Kumano-go</u>、
The second term of the semi-classical asymptotic expansion for Feynman path integrals with integrand of polynomial growth、
Journal of the Mathematical Society of Japan、58 巻、837-867 頁、2006 年、査読有

⑥Daisuke Fujiwara、<u>Naoto Kumano-go</u>、
An improved remainder estimate of stationary phase method for some oscillatory integrals over a space of large dimension、
Funkcialaj Ekvacioj、49 巻、pp.59-86 頁、2006 年、査読有

〔学会発表〕（計１３件）

①<u>Naoto Kumano-go</u>、
Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations、

AMS Joint Mathematics Meeting、
2009年1月6日、Washington D. C., USA

②Naoto Kumano-go、
Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations、The workshop `Decay and regularity for solutions of differential equations and dynamical systems'、2008年9月26日、
The University of Cagliari, Italy

③熊ノ郷直人、
Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations、
研究集会「完全WKB解析と超局所解析」、
2008年5月26日、京都大学数理解析研究所

④Naoto Kumano-go、
Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations、
International Symposium"Function Spaces and Partial Differential Equations"、
2008年2月19日、大阪大学

⑤熊ノ郷直人、
Feynman 経路積分，時間分割近似法による経路空間上の解析として、
研究集会「微分方程式の総合的研究」日本数学会函数方程式論分科会、
2007年12月14日、東京大学

⑥熊ノ郷直人、
Feynman 経路積分、時間分割近似法による経路空間上の解析として、
研究集会「確率論とPDE」、
2007年10月15日、広島大学

⑦Naoto Kumano-go、
Phase space path integrals and their semi-classical approximations、
The 9th International Conference `Path Integrals - New Trends and Perspectives' Max-Planck-Institut fur Physik komplexer Systeme、
2007年9月25日、Dresden, Germany

⑧Naoto Kumano-go、
Path integrals as analysis on path space by time slicing approximation、
The 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics、
2007年7月18日、Zurich, Switzerland

⑨Naoto Kumano-go、
Feynman path integrals as analysis on path space by time slicing approximation、
The workshop `Microlocal Analysis and Harmonic Analysis in Inverse Problems'、
2007年3月29日、CIRM, Marseille, France

⑩熊ノ郷直人、
経路積分と準古典近似、
研究集会「微分方程式系の代数解析と完全WKB解析」、
2006年12月14日、京都大学数理解析研究所

⑪Naoto Kumano-go、
Smooth functional derivatives in Feynman path integrals by time slicing approximation、The conference `Partial Differential Equations on Noncompact and Singular Manifolds'、2006年8月11日、
The University of Potsdam, Germany

⑫Naoto Kumano-go、
Feynman path integrals as analysis on path space by time slicing approximation、
研究集会「逆問題ワークショップ」、
2006年7月10日、筑波大学

⑬Naoto Kumano-go、
Smooth functional derivatives in Feynman path integrals by time slicing approximation、The conference `The Feynman Integral and Related Topics in Mathematics and Physics'、2006年5月13日、
The University of Nebraska Lincoln, USA

６．研究組織
(1)研究代表者
熊ノ郷　直人（KUMANOGO NAOTO）
工学院大学・工学部・准教授
研究者番号：４０２９６７７８

(2)研究分担者　なし
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者　なし
（　　）

研究者番号：