

研究種目：若手研究 (B)  
 研究期間：2006～2008  
 課題番号：18740083  
 研究課題名 (和文)  
 変分的手法による活性因子・抑制因子型反応拡散系のパターン形成の解明  
 研究課題名 (英文)  
 Pattern formation arising in reaction-diffusion systems via variational methods  
 研究代表者  
 大下 承民 (OSHITA YOSHIHITO)  
 岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授  
 研究者番号：70421998

## 研究成果の概要：

ある種の非線形偏微分方程式の解の構造に関する研究を行った。具体的には、活性因子・抑制因子型反応拡散方程式系の内部遷移層解の特異極限として現れる曲率依存型の界面方程式において、付随するエネルギー汎関数の変分解析とリャプノフ・シュミットの縮約法を組み合わせた手法により、領域の対称性を仮定せずに、連結で非対称非退化な解の存在を示し、さらに非線形楕円型偏微分方程式の解の線形化非退化性に関する研究を行った。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,300,000	0	1,300,000
2007 年度	1,200,000	0	1,200,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	300,000	3,800,000

研究分野：非線形偏微分方程式

科研費の分科・細目：数学・大域解析学 4105

キーワード：変分法, 非線形現象

## 1. 研究開始当初の背景

反応拡散系と呼ばれる、ある種の非線形偏微分方程式が、物理や生物における「パターン形成」に重要な役割を果たしていることが知られている。拡散不安定性と呼ばれる性質により空間周期的な秩序構造をもつ定常パターンが形成され得ることが明らかとなり、反応拡散系は、自然界の高度な秩序構造の形成に重要な役割を果たしていると考えられるよう

になった。実際、単純な反応拡散系モデルでも、様々な空間的パターンまたは時間的パターンが現れることが知られており、解析的または数値計算的手法により研究されている。

## 2. 研究の目的

活性因子・抑制因子型の反応拡散系は、パターン形成の数理モデルとして活発に研究されてきた。活性因子の拡散係数が極端に小さい

場合には、たとえ空間的に一様な環境下であっても、空間的に非一様な安定定常解が現れることがある。このようなケースを数学的に取り扱うために、拡散係数を0に近づける特異極限問題を考察する。

双安定な反応拡散系では、領域が薄い層（遷移層）により2つに分けられた相分離パターンが現れることが多い。極限では、遷移層の幅は0に近づき、一般にシャープインターフェースと呼ばれる領域内部の不連続面が生じる。

極限状態が滑らかな曲面にならず、振動の激しさが増していく複雑な構造をもった相分離パターンが存在する。このような活性因子・抑制因子型反応拡散系に現れるパターンの形成機構を、特異極限におけるシャープインターフェースの振る舞いを調べることで理論的に解明する。

### 3. 研究の方法

(1) 活性因子・抑制因子型反応拡散系において、微小パラメーターを0に近づけて得られる極限問題を考察する。極限をとると、シャープインターフェースの位置と形に関する幾何学の問題が現れる。具体的には、平均曲率と抑制因子場の両方に依存するタイプの方程式の解の存在を考察する。線形化方程式の固有値の変分的特徴付け、およびリャプノフ・シュミットの縮約法を応用することにより研究する。

(2) 定常解が満たす非線形楕円型方程式を考察する。空間的に非一様な環境下では、変数係数の非線形楕円型方程式になる。空間的に

局在化した定常解の構造を、変分的手法とリャプノフ・シュミットの縮約法を組み合わせることにより、解明する。

係数が、球対称な関数になる場合に、変分的手法を用いて、解の非退化性を研究する。

(3) 活性因子・抑制因子型反応拡散系の一般的な内部遷移層に対するスペクトルを、固有値の変分的特徴付けにより考察する。内部遷移層の極限であるシャープインターフェースが円や直線のような対称性をもっていることを仮定せず、0に近づく臨界固有値のオーダーと対応する固有関数を特徴付けする。これにより、内部遷移層のまわりでの線形化作用素の非退化性、近似解のまわりにおける真の解の存在性、および、その解の安定性について研究する。

### 4. 研究成果

(1) ある種の活性因子・抑制因子型反応拡散系の内部遷移層解の特異極限として現れる自由境界問題の研究を行った。非線形偏微分方程式において、空間多次元における凝集現象の解析は重要な問題である。いくつかの点のまわりへの凝集現象を扱うときは、リャプノフ・シュミットの縮約により有限次元の問題に帰着されるが、内部遷移層解の極限として得られる自由境界問題は、無限次元のままである。

このような場合においても、ロバン関数を使って非対称な解を構成することができた。

具体的には、付随するエネルギー汎関数の変分の解析と適切な射影作用素を組み合わせた手法により、ノイマン境界条件に対するロバン関数が非退化な臨界点をもてば、対称性を仮定しない一般領域においても解が存在することを示した。さらに、この解は円板の小さ

な摂動となっており非対称であることを示した。

本研究の後、類似の自由境界問題に対する非対称解の存在性は、インターフェースが複数の連結成分を持つ場合に拡張されている。

(2) 微小パラメーターをもつ活性因子・抑制因子型反応拡散系の定常問題として現れる楕円型偏微分方程式のシステムに対する解の存在性に関する研究を行った。

活性因子・抑制因子型反応拡散系の定常問題は特異極限をとると、曲率依存型の界面方程式と楕円型偏微分方程式の連立方程式になる。この極限問題の解が存在する場合に、接合漸近展開法を利用してもとの微小パラメーターをもった特異摂動問題の解の存在を示すためには、極限問題の解の線形化非退化性が重要な鍵となる。

ロバン関数が非退化な臨界点をもつ場合に、

(1) で構成した解が線形化の意味で非退化であることを示した。

(3) 反応拡散系は自然界におけるパターン形成の数理モデルである。固有値の変分的特徴付けにより、活性因子・抑制因子型反応拡散系の一般的な内部遷移層のスペクトルに関する結果を得た。内部遷移層の極限であるシャープインターフェースが円や直線のような対称性をもっていることを仮定せず、0 に近づく臨界固有値のオーダーと、対応する固有関数の特徴付けに成功した。これにより、特異極限問題の解の存在と非退化性を仮定したとき、内部遷移層のまわりで線形化した作用素が0 固有値をもたないことがわかる。したがって、近似解のまわりに真の解を構成することができること、およびその解の安定性が極限問題に帰着されることを、対称性の仮定な

しで厳密に示した。

(4) 活性因子・抑制因子型の2種の反応拡散系において、抑制因子の拡散係数が非常に大きい極限では、シャドーシステムと呼ばれる方程式に帰着される。さらに、定常問題の場合は単独非線形楕円型偏微分方程式になる。この非線形楕円型方程式は、非線形シュレディンガー方程式の定常波に関する方程式においても現れるものである。空間非一様な環境下では、変数係数の非線形楕円型方程式になる。この係数が、球対称な関数になる場合に、変分的手法を用いて、解の非退化性に関する結果を得た。これは、複数の点に集中している多重バンブ解を構成する上で基礎となる重要な性質である。さらに、変分的手法とリャブノフ・シュミットの縮約法を同時に使うハイブリッドな手法で、多重バンブ解を構成することに成功した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Jaeyoung Byeon and Yoshihito Oshita, Uniqueness of standing waves for nonlinear Schroedinger equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 138 (2008), 975–987, 査読有
- ② 大下承民, 応用数理, 活性因子・抑制因子型反応拡散系の特異極限問題とパターン形成, 17 (2007), 215–226, 査読有
- ③ Yoshihito Oshita, Singular limit problem for some elliptic systems,” SIAM J. Math. Anal. 38 (2007), 1886–1911, 査読有
- ④ 大下承民, Singular limit problem for some elliptic systems, 2006,

Surikaiseki Kokyuroku No. 1528 (2007),  
85-95, 査読無

[学会発表] (計 17 件)

① Yoshihito Oshita

Fine structures arising in diblock  
copolymers and reaction-diffusion  
systems  
OxPDE Seminar  
University of Oxford  
2008 年 11 月 24 日

② Yoshihito Oshita

Existence of multi-bump standing waves  
with a critical frequency for  
nonlinear Schrodinger equations  
Variational Methods for Elliptic PDE's  
and Hamiltonian Systems  
POSTECH  
2008 年 10 月 10 日

③ Yoshihito Oshita

Hexagonal Patterns of Di-Block  
Copolymer Melts  
SIAM Conference on Mathematical Aspects  
of Materials Science  
Philadelphia  
2008 年 5 月 12 日

④ Yoshihito Oshita

Singular limit problem for some elliptic  
systems  
Special Lecture  
Pusan National University  
2008 年 3 月 28 日

⑤ 大下承民

非線形楕円型方程式の正值解の非退化性  
と multi-bump 解  
非線形現象の数値シミュレーションと解  
析 2008  
北海道大学  
2008 年 3 月 6 日～3 月 7 日

⑥ Yoshihito Oshita

Uniqueness of standing waves for  
nonlinear Schrodinger equations  
Young Asian Conference on Partial  
Differential Equations  
POSTECH  
2008 年 1 月 28 日～1 月 29 日

⑦ 大下承民

Singular limit problems for some  
elliptic systems  
SIAM Conference on Analysis of Partial

Differential Equations (PD07)  
Mesa  
2007 年 12 月 10 日～12 月 12 日

⑧ Yoshihito Oshita

Singular limit problem for elliptic  
systems of activator-inhibitor type  
PDE seminar, National Taiwan Normal  
University, Taipei  
2007 年 10 月 16 日

⑨ Yoshihito Oshita

Singular limit problem for some elliptic  
problems  
PDE seminar, Pohang University of  
Science and Technology, Pohang  
2007 年 3 月 28 日

⑩ Yoshihito Oshita

Singularly perturbed nonlocal  
variational problem  
SNP 2006(京都)  
2006 年 12 月 5 日

⑪ 大下承民

ある楕円型システムの特異極限問題  
応用解析セミナー(熊本)  
2006 年 11 月 11 日

⑫ 大下承民

ある楕円型システムの特異極限問題  
NSC12 周年: 非線形数理の現状と発展(札  
幌)  
2006 年 10 月 13 日

⑬ 大下承民

ある楕円型システムの特異極限問題  
非線形の諸問題(別府)  
2006 年 9 月 29 日

⑭ 大下承民

楕円型方程式系の特異極限問題  
日本数学会(大阪)  
2006 年 9 月 21 日

⑮ Yoshihito Oshita

Singular limit problem for some elliptic  
systems  
Recent advances in Free Boundary  
Problems and related topics  
(Levico, Italy)  
2006 年 9 月 15 日

⑯ Yoshihito Oshita

Singular limit problem for some elliptic  
systems  
変分問題とその周辺(京都)

2006年6月21日

⑰ 大下承民

楕円型方程式系の特異極限問題  
広島数理解析セミナー第98回(東広島)  
2006年5月19日

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大下 承民 (OSHITA YOSHIHITO)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号：70421998

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし