

研究種目：若手研究 (B)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18740084
 研究課題名 (和文) 熱核の gradient の Gauss 型評価に伴う空間の幾何学的性質の研究
 研究課題名 (英文) Geometric property of the Gaussian estimate of the gradient of the heat kernel
 研究代表者
 石渡 聡 (ISHIWATA SATOSHI)
 筑波大学・大学院数理物質科学研究科・助教
 研究者番号：70375393

研究成果の概要：非コンパクトリーマン多様体及び無限グラフにおいて、近年熱核の長時間挙動と空間の大域的な性質との深いつながりが明らかとなってきた。このような状況のもと、本研究では熱核の空間方向への gradient について研究を行い、①熱核の gradient の Gauss 型評価がグラフのある摂動のもとでは安定であること、②Dungey の方法によりベキ零群の作用のあるグラフ上では熱核の gradient が Gauss 型評価を持つこと、③ベキ零被覆グラフの中心極限定理がグラフのある摂動のもとで安定であること、④正方格子グラフの連結和の下で熱核の gradient の Gauss 型評価が成り立たないための十分条件、を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	1,000,000	0	1,000,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	300,000	3,300,000

研究分野：幾何解析

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：多様体上の解析学, 熱核の長時間挙動, 熱核の gradient 評価, Sobolev の不等式, Poincare 不等式

1. 研究開始当初の背景

非コンパクトリーマン多様体及び無限グラフにおいて、熱核の長時間挙動に空間のどのような性質が反映しているのかという研究はこれまでに非常に多くの重要な成果が積み上げられてきた歴史のあるテーマである。中でも1986年の Li-Yau による、Ricci 曲率が非負ならば熱核 $h(t, x, y)$ は Gauss 型評価

$$h(t, x, y) \sim \frac{c}{V(x, \sqrt{t})} e^{-bd(x, y)^2/t}$$

を持つという結果により、Gauss 型評価が集中的に研究されるようになった。ここで $V(x, r)$ は x を中心とする半径 r の ball の体積、 d は距離である。その後、1990年代に Grigoryan, Saloff-Coste によって熱核の Gauss 型評価は volume doubling 条件と Poincare 不等式という幾何的な不等式と同値であることが明らかとなり、多様体がユーク

クリッド空間にある程度近ければ熱核も近いという結論が得られた。

一方、調和解析で重要な役割を持つ Riesz 変換 $\nabla\Delta^{-1/2}$ の L^p 有界性は、1999 年、Coulhon, Duong により $1 < p \leq 2$ で有界であることと熱核が上から Gauss 型評価を持つことが同値であることが明らかとなり、熱核の Gauss 型評価の研究の新たな展開がみられた。この結果を動機として Riesz 変換の L^p 有界性に空間のどのような性質が反映するのかについての研究が行われ、2004 年、Auscher, Coulhon らによる研究により、熱核の gradient が Gauss 型評価

$$\nabla h(t, x, y) \leq \frac{c}{\sqrt{t}V(x, \sqrt{t})} e^{-bd(x,y)^2/t}$$

を持つならば Riesz 変換が $1 < p < \infty$ で L^p 有界であることが示され、熱核の gradient がいつ Gauss 型評価を持つのかについて調べることが課題となっていた。

2. 研究の目的

これまでの熱核の Gauss 型評価 (あるいは Riesz 変換の L^p 有界性) の研究では、Littlewood-Paley 理論を用いた解析的な条件による研究以外には、成立する例 (Ricci 曲率が非負の非コンパクトリーマン多様体 (Li-Yau, 1986), ベキ零 Lie 群 (Alexopoulos, 1997)), しない例 (ユークリッド空間の連結和 (Coulhon, Duong, 1987), Cone 多様体 (H. Q. Li, 2004 年)) がいくつか知られているだけで、空間のどのような性質が関わっているのかは不明であった。そこで 1 で述べたこれまでの熱核の長時間挙動の研究を踏まえ、熱核の gradient の長時間挙動と空間の幾何学的性質にどのような関係があるのかを明らかにすることが本研究の目的である。

3. 研究の方法

(1) 熱核の gradient の Gauss 型評価の安定性

熱核の Gauss 型評価は Sobolev の不等式, Poincare 不等式等を通して quasi-isometry で不変であることが知られている (Coulhon, Saloff-Coste ら)。しかし熱核の gradient の Gauss 型評価に関しては quasi-isometry で安定ではないだろうと考えられている。

このことから熱核が Gauss 型評価を持つなどの適切な条件のもとで、空間の摂動で熱核の gradient の Gauss 型評価がどこまで成立しているかを調べることで幾何構造の抽出を目指す。

(2) 熱核の gradient が Gauss 型評価を満たさない空間の研究

本研究のためには、熱核の gradient が Gauss 型評価を満たす空間を調べるだけでなく、満たさないような空間について何故だめなのかを詳しく調べることも大変重要である。そのため、熱核の gradient の Gauss 型評価を満たさない例として知られている空間の連結和を変形してどこまで成立していないのかを調べる。

4. 研究成果

(1) 無限グラフのある摂動のもとでの熱核の gradient の Gauss 型評価の安定性 (論文②)

グラフ上では熱核 (ランダム・ウォークの推移確率) は有限伝播であるため、組み合わせ論的方法が有効であることから、研究の方法 (1) に沿い、無限グラフの辺の変形の下で熱核の gradient の Gauss 型評価の安定性を調べた。ここではグラフは熱核が両側の Gauss 型評価と D 次の多項式増大度を満たすものと仮定する。

この研究の結果として、変形の多項式増大度が D-2 未満ならば、熱核の gradient の Gauss 型評価は安定であることを示した。この結果により、熱核の gradient が Gauss 型評価を持つ空間の例として従来は空間に周期的な構造等のやや強い仮定が必要だったが、変形を行うことによってより多くの例を構成することが可能になった。

(2) ベキ零被覆グラフ上の熱核の gradient の Gauss 型評価 (論文③)

研究成果 (1) の副産物として、Dungey によりベキ零被覆多様体の場合に得られていた熱核の gradient の Gauss 型評価のシンプルな証明に沿い、ベキ零被覆グラフの場合でも従来よりも簡単に証明できることを明らかにした。

(3) ベキ零被覆グラフの変形の下での中心極限定理の安定性 (論文①)

研究代表者は 2000 年、ベキ零被覆グラフをあるベキ零 Lie 群にうまく実現することにより関数解析的中心極限定理を示した。この研究ではグラフの周期性が決定的に重要な要素であるが、グラフを変形した際に現れる剰余項に熱核の gradient が現れることに着目し、研究成果 (1) の応用としてベキ零被覆グラフに (1) の変形を行っても中心極限定理が成立することを示した。

尚、研究の方法 (2) の成果として、D 次正方格子の連結和において、連結部分の増大

度が $D-1$ 未満でも熱核の gradient は Gauss 型評価を満たさないことを示した (現在投稿中).

この結果により, Poincare 不等式は成立するが, 熱核の gradient は成立しない例を豊富に構成できるようになった.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① S. Ishiwata, A central limit theorem on modified graphs of nilpotent covering graphs. Spectral Analysis in Geometry and Number Theory, 59—72, Contemporary Mathematics 484 American Mathematical Society, 2009. 査読有り
- ② S. Ishiwata, Gradient estimate of the heat kernel on modified graphs. Potential Analysis. 27 (2007) no. 4, 335—351. 査読有り
- ③ S. Ishiwata, Discrete version of Dungey's proof for the gradient heat kernel estimate on coverings. Annales Mathematiques Blaise Pascal 14 (2007), no.1,93—102. 査読有り

[学会発表] (計 24 件)

- ① 石渡聡 「Heat kernel on gluings」数理情報科学セミナー, 広島大学総合科学部, 2009年1月26日.
- ② 石渡聡 「Heat kernel on gluings」微分トポロジーセミナー, 京都大学理学部, 2008年12月9日.
- ③ 石渡聡 「Heat kernel on gluings」松江セミナー, 島根大学総合理工学部, 2008年11月5日.
- ④ 石渡聡 「Gradient heat kernel estimate on gluings」Stochastic Analysis and Applications, 2008, 九州大学西新プラザ, 2008年9月12日.
- ⑤ 石渡聡 「Heat kernel on gluings」リーマン幾何と幾何解析, 筑波大学, 2008年2月18日.
- ⑥ 石渡聡 「Heat kernel on gluings」福岡大学微分幾何学研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2008年1月12日.
- ⑦ 石渡聡 「熱核の gradient 評価と Riesz 変換の L^p 有界性」バナッハ環セミナー, 筑波大学, 2007年11月21日.
- ⑧ 石渡聡 「ベキ零離散群上のランダム・ウォークの漸近挙動について」仙台放物型・楕円型方程式研究集会, 東北大学, 2007年11月17日.
- ⑨ 石渡聡 「Behavior of the Heat kernel on

gluings」談話会, 東京理科大学理工学部, 2007年11月8日.

- ⑩ 石渡聡 「Gradient heat kernel estimate on gluings」微分幾何学火曜セミナー, 筑波大学, 2007年10月23日.
- ⑪ 石渡聡 「Gradient heat kernel estimate on gluings」確率論と幾何学, 熊本大学, 2007年10月19日.
- ⑫ 石渡聡 「Gradient heat kernel estimate on gluings」幾何学阿蘇研究集会, 休暇村阿蘇, 2007年9月3日.
- ⑬ 石渡聡 「Random walks on nilpotent covering graphs」International Conference "Spectral Analysis in Geometry and Number Theory" on the occasion of Toshikazu Sunada's 60th birthday, 名古屋大学, 2007年8月9日.
- ⑭ 石渡聡 「Gradient heat kernel estimate on gluings」談話会, 岡山大学理学部, 2007年7月4日.
- ⑮ 石渡聡 「Connectivity on discrete nilpotent groups」Analysis on Graphs and Fractals, Cardiff University, UK, 2007年5月31日.
- ⑯ 石渡聡 「ベキ零離散群の連結性」2007年度年会, 埼玉大学, 2007年3月29日.
- ⑰ 石渡聡 「グラフ上のランダム・ウォークに関する関数解析の中心極限定理」神奈川大学数学教室談話会, 2007年1月26日.
- ⑱ 石渡聡 「ベキ零離散群の連結性」多様体上の微分方程式, 金沢大学, 2006年12月6日.
- ⑲ 石渡聡 「Connectivity of discrete nilpotent groups」Sendai Max Dehn seminar, 東北大学, 2006年10月20日.
- ⑳ 石渡聡 「A connectivity of discrete nilpotent groups」Department Lecture, University of Cyprus, キプロス, 2006年10月4日.
- ㉑ 石渡聡 「ベキ零離散群の連結性」筑波大学微分幾何学火曜セミナー, 筑波大学, 2006年9月12日.
- ㉒ 石渡聡 「熱核の gradient がガウス型評価を持つ空間と持たない空間」第53回幾何学シンポジウム, 金沢大学, 2006年8月7日.
- ㉓ 石渡聡 「A stability of a gradient estimate for the heat kernel on graphs」Asymptotics in Geometry, 東北大学, 2006年7月15日.
- ㉔ 石渡聡 「熱核の gradient のガウス型評価」東京確率論セミナー, 東京工業大学, 2006年6月16日.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~ishiwata/research/research.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石渡 聡 (ISHIWATA SATOSHI)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・
助教

研究者番号：70375393

(2) 研究協力者

Thierry Coulhon

Cergy-Pontoise 大学 (フランス)・教授

小谷 元子 (KOTANI MOTOKO)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50230024

熊谷 隆 (KUMAGAI TAKASHI)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90234509