

平成 21 年 6 月 11 日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2006～2008

課題番号：18740086

研究課題名（和文） 自由境界問題と単調性等式

研究課題名（英文） Free Boundary Problems and Monotonicity Formulas

研究代表者

G・S Weiss (Georg Sebastian Weiss)

東京大学・数理科学研究科・准教授

研究者番号 30282817

研究成果の概要：個体燃焼理論等に現れる現代的自由境界問題の現象を研究し、その解析に役立つ新しい方法を示した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	800,000	0	800,000
2007年度	1,400,000	0	1,400,000
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
総計	3,400,000	360,000	3,760,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形偏微分方程式、自由境界問題、固体燃焼理論、パターン形成、特異点

## 1. 研究開始当初の背景

自由境界問題は300年以上前にニュートンにより水面波の際に研究されて以来、最近の応用に至るまで、科学者の興味を得ている。幾つかの現代的な自由境界問題における現象を研究した。

## (1) 固体燃焼理論における特異極限および進行波

1970年代以降固体燃焼理論（つまり燃焼可能な多孔質固体が燃焼していく過程）のモデルと過冷却水が凍る過程のモデルの間に関係があることが予想されている。それに関連する代表的な論文では B.J. Matkowsky-G.I. Sivashinsky が形式的に、空間1次元と高活性化エネルギーの場合の特異極限を導き出した。その論文を出発点とし、数多くの論文で数値解析と予想極限問題の解析が行われた。特に、spin 燃焼と呼ばれるネジ形の進行波の数値解析結果が多い。有限活性化エネルギーと極限問題両方には高い

不安定性が観察されているから、正確な解析は易しくない問題である。

## (2) 自由境界問題の高次元特異点

障害物問題のような、古典的な自由境界問題に関しては解・自由境界の正則性及び特異点の構造についてよく理解されている。一方、不安定な方程式及び2相問題に関しては未解決問題が多く、従来の方法だけでは不十分である。

## (3) 非線形偏微分方程式における単調性等式

単調性等式は非線形偏微分方程式の正則性で重要な役割を演じる。正則集合の解析以外にも、例えば特異点における漸近的な振る舞い、グローバルソリューションの構造、特異極限等の研究に役立つ。

残念ながら単調性等式はいくつかの特殊な方程式（例えば極小曲面、平均曲率流、調和写像等）についてしか知られていない。

## 2. 研究の目的

### (1) 固体燃焼理論における特異極限および進行波

活性化エネルギーが無限大へ行くときの、Self-propagating High temperature Synthesis (SHS、自己燃焼合成法)の正確な極限を求め、極限問題の非自明進行波を示すこと。

### (2) 自由境界問題の高次元特異点

障害物問題よりも現代的な自由境界問題の際に、新しい方法により特異点及び特異点の近傍における振る舞いを研究すること。

(3) 非線形偏微分方程式における単調性等式  
異方的非線形偏微分方程式、4階非線形偏微分方程式等に関して新しい単調性等式及び frequency formula を示すこと。

## 3. 研究の方法

### (1) 固体燃焼理論における特異極限および進行波

パリの CERMICS (数学、コンピュータ、科学的計算教育研究センター)の Regis Monneau 氏と共同で、幾何学的測度論、blow-up 法等を用いて、特異極限を研究すること。

### (2) 自由境界問題の高次元特異点

Regis Monneau 氏と John Andersson 氏 (Max Planck 研究所、Leipzig、ドイツ)と、体燃焼理論の進行波及び composite membrane 問題で現れる不安定自由境界問題

$$u = - \quad (u > 0)$$

を研究すること。

H. Shahgholian 氏 (王立工科大学、ストックホルム)と N. Uraltseva 氏 (サンクトペテルブルク)と「2相幕問題」を研究すること。

(3) 非線形偏微分方程式における単調性等式  
John Andersson 氏と4階非線形偏微分方程式等に関して新しい単調性等式及び frequency formula を求めること。

## 4. 研究成果

### (1) 固体燃焼理論における特異極限および進行波

パリの CERMICS (数学、コンピュータ、科学的計算教育研究センター)の Regis Monneau 氏との共同プロジェクトである。

活性化エネルギーが無限大へ行くときの、Self-propagating High temperature Synthesis (SHS、自己燃焼合成法)の正確な極限を求めた。(発表論文、)我々の結果は B.J. Matkowsky-G.I.Sivashinsky の 1978 年の scaling、また、A. Bayliss-B.J. Matkowsky-A.P. Aldushin の 2002 年の

scaling などへの適用が可能である。正確な極限問題は変数係数の過冷水のステファン問題である。(発表論文)

我々が導き出した正確な極限問題によって、数値解析で観察された pulsating wave を驚くほど簡単に説明することができる。極限問題の柱面上の非自明 pulsating wave も示した。(発表論文)

Regis Monneau 氏と導き出したアプローチを現在、Peter Gordon 氏(ニュージャージー理工学院)と、より難しい多孔質媒質燃焼過程へ拡張しているところである。

### (2) 自由境界問題の高次元特異点

Regis Monneau 氏 (CERMICS、パリ)と固体燃焼理論の進行波及び composite membrane 問題で現れる不安定自由境界問題  $u = - \quad (u > 0)$  を研究し、2次非退化解に関する部分正則性と minimiser の正則性を示した。(発表論文) J. Andersson 氏 (Max Planck 研究所、Leipzig、ドイツ)との共同研究によって、特異点の例、つまり2階導関数が非有界な例と退化解の例を構築した。(発表論文) 投稿中と執筆中の論文では上記の問題に関して、2、3次元のときに特異集合の正則性を示し、特異点の近傍における漸近的な振る舞いを解析した。

H. Shahgholian 氏 (王立工科大学、ストックホルム)と N. Uraltseva 氏 (サンクトペテルブルク)と「2相幕問題」を考察した。楕円型・放物型問題両方に関して任意の次元で「branch point」と呼ばれる特異点の近傍における正則性を示した。(発表論文、)

(3) 非線形偏微分方程式における単調性等式  
半線形偏微分方程式のある族に関して、新しい frequency formula を導き出した。その一つの応用として、Eugen Varvaruca 氏 (インペリアル・カレッジ・ロンドン)と、水面波の2次元モデルにおける拡大ストークス予想を示した。

4階半線形楕円型偏微分方程式の1相自由境界問題に関しても単調性等式を求めたが、論文未執筆である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

- Henrik Shahgholian, Nina Uraltseva, Georg S. Weiss, A parabolic obstacle problem-like equation, Adv. Math., 221, 2009年, 861-881, 査読

- 有
- . Regis Monneau, Georg S. Weiss, Pulsating traveling waves in the singular limit of a reaction-diffusion system in solid combustion, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 2009年、査読有
  - . John Andersson, Georg S. Weiss, A parabolic free boundary problem with Bernoulli type condition on the free boundary, Journal fuer die Reine und Angewandte Mathematik, 627, 2009年、213-235、査読有
  - . Henrik Shahgholian, Nina Uraltseva, Georg S. Weiss, The two-phase membrane problem - Regularity in higher dimensions, Int. Math. Res. Not. doi:10.1093/imrn/rnm026, 2007年、1-16、査読有
  - . Regis Monneau, Georg S. Weiss, Self-propagating High temperature Synthesis in the high activation energy regime, Acta Math. Univ. Comenianae, 76 (1), 2007年、99-109、査読有
  - . Regis Monneau, Georg S. Weiss, An unstable elliptic free boundary problem, Duke Math. J., 136 (2), 2007年、321-341、査読有
  - . John Andersson, Georg S. Weiss, Cross-shaped and degenerate singularities in an unstable elliptic free boundary problem, J. Differential Equations, 228 (2), 2006年、633-640、査読有
  - . Henrik Shahgholian, Georg S. Weiss, The two-phase membrane problem - an intersection-comparison approach to the regularity at branch points, Adv. Math., 205 (2), 2006年、487-503、査読有

[学会発表](計7件)

- . Georg S. Weiss, Geometric methods and generalized Stokes conjectures for water waves, Nordic-Russian Symposium in Honor of Vladimir Maz'ya, 2008年8月26日~28日、ストックホルム
- . Georg S. Weiss, A new frequency formula and applications to a singular perturbation problem, Viscosity Solutions in Partial Differential Equations, 2008年6月25日~27日、京都
- . Georg S. Weiss, A Nonlinear Frequency Formula and the Singular set of a Free

Boundary Problem, Free Boundary Problems - Theory and Applications, 2008年6月9日~13日、ストックホルム

- . Georg S. Weiss, A New Frequency Formula and the Singular Set of a Free Boundary Problem, Partielle Differentialgleichungen, 2007年7月23日~30日、Oberwolfach、ドイツ
- . Georg S. Weiss, A Parabolic Free Boundary Problem with Bernoulli type Condition on the Free Boundary, Geometry of Singularities, 2007年1月9日~12日、仙台
- . Georg S. Weiss, Self-propagating High temperature Synthesis (SHS) in the High Activation Energy Regime, SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, 2006年7月10日~12日、ボストン
- . Georg S. Weiss, A Parabolic free boundary problem with Bernoulli type condition on the free boundary, Variational Problems and Related Topics, 2006年6月20日~22日、京都

[その他]

Math. Reviews Reviewer

ホームページ

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~gw/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

G・S・Weiss (Georg Sebastian Weiss)  
 東京大学・数理科学研究科・准教授  
 研究者番号 30282817