様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21　年　5　月　29　日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：18740088
研究課題名（和文）　リーマン多様体間の調和写像の特異性と安定性の研究

研究課題名（英文）　Study on singularities and stability of harmonic maps between Riemannian manifolds

研究代表者
中島　徹（NAKAJIMA TORU）
静岡大学・工学部・准教授
研究者番号：50362182

研究成果の概要：コンパクトリーマン多様体間の写像で、ディリクレ汎関数の停留点になっているものを調和写像と呼ぶ。調和写像は測地線の一般化と考えられるが、一般に不連続点を持ち得るものである。しかし値域となる多様体が球面という典型的な場合でさえ、不連続性の解析は十分ではない。本研究では不連続性の解析に関連して、調和写像の安定性について考察を行い、３次元以上の球面間の定数写像でない調和写像に付随するヤコビ作用素の最少固有値が最大になる場合の、調和写像の特徴付けを行った。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,300,000	0	1,300,000
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	360,000	3,860,000

研究分野：大域変分法
科研費の分科・細目：（分科）数学　（細目）大域解析学
キーワード：調和写像、安定性、特異性

１．研究開始当初の背景

調和写像とはリーマン多様体間の写像で、ディリクレ汎関数の停留点に対応する写像のことであり、1960 年代より活発に研究されているものであり、多様体のホモトピー群の生成問題や、Lie 群の剛性定理など、幾何学における重要な対象である。

しかし滑らかな調和写像の存在は一般に明らかではない。その一つの理由として、不安定性原理と呼ばれるものがある。k を 3 以上の自然数としたとき、k 次元球面から任意のコンパクトリーマン多様体への定数写像でない調和写像に付随するヤコビ作用素の最少固有値は 2-k　以下であることが Xin

によって示されていた。とくに最少固有値が負であるため、調和写像は不安定であることが従う。この事実は解の存在を証明する際や、近似解を求める際に大きな障害となる。

また Xin の得た評価が最良であることは、k 次元の球面間の恒等写像（および直行行列との合成）に付随するヤコビ作用素の最少固有値が 2-k であるという Smith の結果よりわかる。しかしその後の調和写像の安定性の研究は、安定、不安定の判別のみを行うもの主流で、安定な写像は定数写像に限るというものが大半であり、不安定性の精密な評価というものはなかった。特に付随するヤコビ作用素の最少固有値が 2-k に一致する場合の調和写像の分類は行われておらず、本研究者の結果が初めてのものである。この問題の困難な点として、調和写像に付随するヤコビ作用素が調和写像による接束の引き戻しの切断に対する Schrodinger 型の作用素になっているが、ポテンシャルに対応する項が、もとの調和写像に関係するものであり、ポテンシャルに条件をつけることができないというものがある。

またこの研究の動機となったものは、本研究者自身の過去の結果である 4 次元領域から 3 次元球面への定常かつ安定な調和写像の孤立特異点の近傍での挙動の解析がある。もともと幾何学で重要とされていた調和写像は滑らかなものであったが、1980 年代初頭の Schoen-Uhlenbeck により部分的正則性の研究から、特異性をもつ調和写像の研究が盛んになった。調和写像に特異性をもつことをゆるすことにより、存在を示すことが容易になる。またこのような特異性をもった調和写像は物理的なモデルをもつため、数学者のみならず物理学者の興味の対象でもあった。Brezis-Coron-Lieb は 3 次元領域から 2 次元球面への調和写像に対して行い、特に液晶のモデルに応用があった。本研究者はこの研究の 1 次元高い場合､つまり 4 次元領域から 3 次元球面への調和写像の孤立特異点の挙動の解析を行った。その際鍵になったのが調和写像の安定性の解析であった。しかしさらに高次元の場合には類似の手法は適応できず、いまだ未解決の状態である。

２．研究の目的

球面に値をとるエネルギーを最小にする調和写像の特異点の近傍での挙動を解析するため、調和写像に付随するヤコビ作用素の固有値の解析を行う。液晶や超電導のモデルとも関係するため、物理的な応用も期待している。

また幾何学的な応用として、ホモトピー群の生成問題があげられる。実際 Schoen-Uhlenbeck はエネルギーを最小にする調和写像の特異点における blow-up の手法と, 境界での正則性定理を用いることにより、任意のコンパクトリーマン多様体に対して、2 次ホモトピー群は 2 次元球面からの調和写像の全体により生成されることを示している。この結果については, Sachs-Uhlenbeck による bubbling を用いた証明、Struwe による熱流を用いた証明という別証明が存在する。これらの結果において定義域となる多様体の次元が 2 であることは重要であり、いまのところ高次元への自然な拡張は存在しない。拡張の困難な点は bubbling を用いる場合は、「集中集合」とよばれる集合が 調和写像の定義域の 2 次元の場合は有限集合になるのに対し, 3 次元以上の場合は無限集合になりうるというところにある。また、熱流の方法による場合も, 熱流の解の「爆発集合」定義域が 2 次元の場合は有限集合であるのに対し, 3 次元以上ではやはり無限集合になりうる。特異点を用いた場合もどうようにして, 定義域が 3 次元以上の場合は「特異集合」が無限集合になりうるが、値域となる多様体にある種の条件をおくことにより, 「特異集合」が有限集合になることがしられている。このことから特異点の研究の 3 次ホモトピー群の生成問題への応用を目論んでいる。

他の研究の目的として、球面の次元による幾何学的性質の違いを調べるというものがある。球面は定義自体は次元によらず同様のものであるが、その幾何学的性質は次元によって異なり複雑なものである。これは球面のホモトピー群が（2 次元球面であっても）完全に求められていないことからもうかがえる。本研究者の過去の結果と Brezis-Coron-Lieb の結果を比べると、2 次元球面と 3 次元球面の性質の差が見て取れる。興味深い点はエネルギーを最小にする調和写像を解析するだけでは、二つの結果の差はほとんどないのに反して、エネルギーの最小性を弱めた条件である安定性を考察した際に際立った違いがみてとれるということである。このような差が高次元の球面についてどのような形で表れるかを解明することは、球面という簡単（と思われがちな）多様体の幾何学的性質を解明するうえで興味深い。

３．研究の方法

調和写像の特異点の研究と、球面からの調和写像の研究は密接に関係している。その大き

な理由としてエネルギーを最小にする調和写像に関しては、接写像の方法により、特異点の近傍での挙動の解析は、球面からの調和写像の問題に帰着される。これは幾何学的変分問題で常套手段ともいうべき、リスケールの極限を調べるという接写像の方法を用いることによってわかることである。また値域となるリーマン多様体が3次元以上の球面であるばあいには、もうすこし条件を弱めることが可能で、安定かつ定常な調和写像についても同様のことが示される。ただし特異点の近傍での挙動について得られる結果はやや弱いものになる。

上に述べたことにより、球面間の滑らかな調和写像について考察することになる。球面に値をとるという条件から、調和写像に付随するヤコビ作用素から、実数値関数に対する非負の汎関数を構成する。具体的な構成方法は、調和写像に直行する特殊なベクトル場を構成し、そのベクトル場に滑らかな試験関数をかけて、第二変分に代入するというものである。この汎関数は値域となる多様体が球面であることを有効に使ったものであり、Dirichlet 汎関数にもとの調和写像のエネルギー密度（の定数培）がポテンシャルとしてついた形になっている。球面以外では Lie 群または、斉次空間でも類似の汎関数を構成することが可能であることがしられているが、その場合は精密な評価をうまく得ることがいまのところ成功しておらず、今後の発展が期待されている。球面以外でうまくいっていない理由として、ポテンシャルに相当する項が、Bochner 公式とあまり相性が良くないということがあげられる。

上で得た汎関数に、球面の間の調和写像に対する Bochner 公式と Yau のトリックと呼ばれる加藤の不等式の改良版をもちいることにより、汎関数の最少化関数を具体的に得ることができる。この際汎関数に現れる次元に依存した定数が巧妙に働き、すべての不等式が等式になっていることがわかる。この等号成立条件と楕円型偏微分方程式の解にたいする Harnack の不等式、及び 2 次元以上の球面が単連結であることから、もとの調和写像が共形微分同相であることが示される。

以上のように研究方法は微分幾何学及び実解析学、偏微分方程式論で長年研究されてきた不等式の精密な評価を積み重ね、等号成立条件を一つ一つ調べていく解析的手法と、多様体のもつ幾何学的性質を用いる幾何学的な手法をあわせるものである。

４．研究成果

k を 3 以上の自然数とするとき、k 次元球面間の調和写像に付随するヤコビ作用素の最少固有値が 2-k であるとき，この調和写像は直行行列の差を除いて恒等写像であることを示した。またこの結果の証明は，もしヤコビ作用素の最小固有値が 2-k より大きければ，もとの調和写像は定数写像以外ありえないということも示している。ある意味で Xin の定理の別証明をあたえるものである。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）

A remark on instability of harmonic maps between spheres

Pacific Journal of Mathematics
Vol.240, no. 1, 363−-369 (2009) 査読有

〔学会発表〕（計　1 件）

発表者
中島　徹,

発表表題
Singularities of harmonic maps into spheres,

学会名
Nonlinear Analysis of Curves and Surfaces

発表年月日
2007 年 12 月 25 日

発表場所
埼玉大学ソニックシティカレッジ

〔図書〕（計　1　件）

著者名　小園　英雄　他 12 名

出版社名
日本評論社

書名
これからの非線型偏微分方程式

発行年　2007 年　ページ　189--202

６．研究組織

中島　徹 (NAKAJIMA　TORU)
静岡大学・工学部・准教授
研究者番号 50362182