様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２１　年　５　月　２８　日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006-2008
課題番号：１８７４００９２
研究課題名（和文）　楕円変形 W 代数のスクリーニング・カレントの研究

研究課題名（英文）　Study on the screening current for the elliptic deformed W-algebra

研究代表者
小島　武夫（KOJIMA　TAKEO）
日本大学・理工学部・講師
研究者番号：８０３０７８００

研究成果の概要：
楕円量子群、楕円変形 W 代数の自由場表示を考察し、その応用として、無限個の可換な作用素を構成した．特に大きな結果としては、楕円量子群 U_{q,p}(sl_N^)の自由場表示を一般のレベル k で構成したことと、楕円変形 W-代数 W_{q,t}(gl_N^)に付随した２系列（それぞれ局所保存則および非局所保存則とよぶ）の無限個の可換な作用素の族をレベル k=1 で構成したことが挙げられる．これらの可換作用素は、古典可積分方程式 N-th KdV 方程式の保存則およびモノドロミーの楕円量子化と捉えられる．三角関数への退化極限において、さらに一歩進めて、Baxter の Q 作用素を sl_N^ 対称性において構成し、量子可積分系の Baxter の T-Q 関係式を導き、これが古典可積分系の Hirota-Miwa 方程式の特殊ケースであることを示した．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	１５０００００	０	１５０００００
２００７年度	１００００００	０	１００００００
２００８年度	１００００００	３０００００	１３０００００
年度			
年度			
総　計	３５０００００	３０００００	３８０００００

研究分野：可積分系
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：無限対称性、楕円量子群、W 代数、自由場表現、可解格子模型、頂点作用素、可換作用素、量子群

１．研究開始当初の背景

可解模型を解く方法・理論のなかで、模型の対称性を表す代数の表現論は強力な方法である．そして、そこに現れる代数そのものが興味深い研究対象である．とりわけ楕円量子群、楕円変形 W 代数などの「楕円代数」に対する興味が高まってきていた．

また古典可積分系ソリトン KdV Theory とその量子化、楕円量子化についての研究状況は以下の（1）（2）（3）であった．

（1）古典可積分系ソリトン方程式である KdV 方程式には無限個の可換保存則が存在することが知られており、また、この可換保存則とモノドロミーとの対応関係も知られて

いた．そしてこれらKdV-Theoryのアフィン・リー環への一般化も知られていた.

（２）古典可積分系である KdV-Theory の共形場理論への拡張は、sl_2^,sl_3^に限れば知られており、Virasoro 代数および W_3 代数(もしくは量子群U_q(sl_2^), U_q(sl_3^))により統制されている. 可換保存則の母関数である(連続)転送行列の構成に止まらず、Baxter Q-作用素の構成まで行なわれていた. また、可換保存則とモノドロミーの量子対応物との関係は Conjecture として知られていた.

（３）しかしながら、KdV Theory の量子場理論である共形場理論の対称性であるVirasoro代数、W-代数（もしくは量子群）をさらに楕円変形 Virasoro 代数, 楕円変形 W 代数（もしくは楕円量子群）へと一般化する研究は手付かずであった.

２．研究の目的

楕円量子群および楕円変形 W 代数についての研究を行う.具体的には、古典可積分系ソリトン KdV Theory の量子場理論版である共形場理論の対称性をさらに一般化し、楕円量子群、楕円変形 Virasoro 代数、楕円変形 W 代数の対称性へと一般化する. 特に、無限個の可換な作用素の族を２系列（局所保存則、非局所保存則とよぶ）構成する. 局所保存則は KdV 方程式の保存則の楕円量子化に相当し、非局所保存則は KdV 方程式のモノドロミーの楕円量子化に相当する.また楕円対称性の代数はその自由場表示が十分には研究されていないので、必要に応じてそれらの構成から始める必要がある.例えばレベル k での楕円量子群の自由場表示の構成を行う必要がある.

３．研究の方法

楕円量子群および楕円変形 W 代数の無限次元表現の空間に可換な作用素を無限個構成する. 無限次元表現としては、特に自由場表現について考察する.（１）（２）（３）（４）（５）に分けて記述する.これは研究成果（１）（２）（３）（４）（５）にそれぞれ対応している.

（１）自由場表現はレベル k=1 の場合には、楕円量子群 U_{q,p}(sl_N^)および楕円変形 W 代数 W_{q,t}(sl_N^)の双方について結果が知られている. これにより極の位置が分かるし、さらに進んで W 代数の交換関係式も分かるわけである. レベル k=1 の局所保存則を、楕円変形 W 代数 W_{q,t}(sl_N^)に楕円テータ関数を掛けたものを積分することで構成した. 楕円変形 W 代数の交換関係のデルタ関数部分を仮に落とした式で仮の「Conjecture」を作り、それを Perturbative に足しあわせていくことで、全体の Conjecture を与えた.交換関係の証明には,Feigin-Odesski 代数を用いるが、W 代数の交換関係に表れるデルタ関数部分の取り扱いが容易ではなかった.

（２）非局所保存則を楕円量子群 U_{q,p}(sl_N^)の Drinfeld current を用いて構成する.まず Drnfeld current にもう１つの current を affine リー環の Dynkin 図形を作るようにして構成した.これは current の affine 化とみなせる.これらの current の積に楕円テータ関数を掛けて積分することで、非局所保存則を構成した.テータ関数部分は、三角関数への退化極限を迂回することで Conjecture を作った.交換関係の証明には Feigin-Odesskii 代数を用いた.この非局所保存則と局所保存則（１）の交換関係は Dynkin 図形の変換不変性が Drinfeld current の affine 化に在ることに留意して示した.

（３）楕円量子群 U_{q,p}(sl_2^)のレベル k の既知の２パラメーター自由場表現を元にして（２）の非局所保存則のレベル k への一般化を行った.（２）の部分では説明を省略したのだが､実は sl_2 対称性の場合には sl_N (N=3,4,5,…)とは大きく異なる困難がある.リー環の２パラメータ変形だけでは不十分であり、もう１つパラメータを入れて保存則構成の際に現れる特異点を除去する必要がある.そのため、楕円量子群 U_{q,p}(sl_2^)の Drinfeld current のレベル k 自由場表現に、さらに１つパラメータを可積分に入れた３パラメータ変形を構成した. 後は、（２）と同様の手順で非局所保存則を構成した.

（４）楕円量子群 U_{q,p}(sl_N^)、(N=3,4,5,…）のレベル k の自由場表現の構成は未解決問題である. 一方、量子群 U_q(sl_N^)のレベル k の自由場表現は既知であった. この量子群の表現を捻る Twister の自由場表現を構成することで、楕円量子群の Drinfeld current の自由場表現を構成した. これにもう１つの current を（２）のときのように affine 化して付加構成することで、非局所保存則の構成を行った.

（５）（１）－（４）は楕円代数についての考察であり、楕円転送行列の係数にあたる可換な作用素の構成した.（５）では、三角関数の場合つまり、量子群もしくは W 代数の場合に制限することで、別の観点での一般化

を考察した．具体的には転送行列およびBaxterのQ作用素をU_q(sl_N)の場合に構成した(N=2,3は既知).より一層具体的には量子群 Uq(sl_N)の Borel 部分代数の q-oscillatorによる表現のトレースを考察することで、Baxter の Q 作用素を構成した. Perturbation の最初の２つの項を比較することで、Baxter T-Q関係式のsl_N^への一般化の Conjecture を与えた.また、q-展開の２項目までを考察することで、sl_N^におけるBaxter T-Q関係式を決定した.

４．研究成果

（１）楕円変形W代数 W_{q,t}(sl_N^)に付随する無限個の可換な作用素（局所保存則）を,楕円変形W代数と楕円テータ関数の積の積分で構成した.積分路はいくらか手がこんだものになった.これの退化極限は、KdV Theory の共形場理論における局所保存則に合致することが簡単な場合に確認できた．つまり KdV Theoryの保存則の楕円量子化に相当する.
（論文②⑥⑦の一部分）

（２）楕円量子群U_{q,p}(sl_N^)に付随する無限個の可換な作用素（非局所保存則）を、楕円 Drinfeld current と楕円テータ関数の積で構成した.これの退化極限は、KdV Theory の共形場理論における非局所保存則（q-モノドロミー行列）に合致することが確認できた．つまり KdV Theory のモノドロミーの楕円量子化に相当する．加えて、この非局所保存則は（１）で構成した局所保存則と可換になることも証明した.
（論文②⑥⑦の一部分）

（３）楕円量子群U_{q,p}(sl_2)のレベルk表現(既知であった)をさらに可積分に１パラメーター変形できることを示し、それを元にして、レベルkにおける無限子の可換な非局所保存則を構成した.
(論文④)

（４）楕円量子群U_{q,p}(sl_N)(N=3,4,5,…)のDrinferd currentとscreening currentのレベルkにおける自由場表現を構成した.具体的には Twister の自由場表示を構成した.これの退化極限は sl_N^の Wkimoto 表現に合致する.
(論文①③)

（５）古典可積分系ソリトンKdV Theoryの量子場理論である共形場理論の対称性を、既知であったsl_2^,sl_3^からsl_N^へと一般化した.具体的には転送行列およびBaxterのQ-作用素を構成し、それの満たすBaxter T-Q 関係式のConjecture をq-展開から特定した．さらに、このBaxtet T-Q関係式は、古典可積分系のHirota-Miwa方程式の特殊ケースに他ならないことを示した.
（論文⑤）

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　7　件）

①T.Kojima Wakimoto realization for the elliptic algebra U_{q,p}(sl_N^), Accepted for publication in Int.J.Mod.Phys.A. 査読有

②T.Kojima and J.Shiraishi, The integrals of motion for the elliptic deformation of the Virasoro and W_N algebra, J.Nonl.Analysis,doi:10.1016/j.n.a.2009.02.081, 査読有

③ T.Kojima, Wakimoto realizatrionof Drinfeld current for the elliptic quantum group U_{q,p}(sl_3^), accepted fo r publication in Physics of Atomic Nuclei, 査読有

④T.Kojima and J.Shiraishi, A remark on the integrals of motion associated with level k realization of the elliptic algebra U_{q,p}(sl_2^),accepted for publication in J.Geometry and Symmetry in Physics, 査読有

⑤T.Kojima, The Baxter’s Q-operator for the W-algebra W_N, J.Phys.A: Math.Theor .41, 355206(16pp),(2008), 査読有

⑥T.Kojima and J.Shiraishi, The Integrals of Motion for the Deformed W-algebra W_{q,t}(gl_N^) II: proof of commutation relations, Commun.Math.Phys. 283, 795-851,(2008), 査読有

⑦ B.Feigin, T.Kojima ,J.Shiraishi, H.Watanabe, The Integrals of Motion for the Deformed W-algebra, Proceedings for Representation Theory 2006, Atami Japan, 102-114, 査読無

〔学会発表〕（計　9　件）

①T.Kojima, Wakimoto realization of the

elliptic quantum group and its application to the integrals of motion,
Colloquium of the University of Texas, USA,2009年3月30日

②T.Kojima, Wakimoto realization of the elliptic quantum group and its application to the integrals of motion,
International Conference WAVE2009, The University of Georgia, USA, 2009年3月24日

③T.Kojima, The Integrals of Motion for the Deformed W-algebra,
International Colloquium on Group Theoretical Method in Physics,
Yerevan State University, Armenia, 2008年8月8日

④T.Kojima The Integrals of Motion for the deformed W-algebra,
World Congress for Nonlinear Analysts,
Session: Applied and Integrable Nonlinear Differential Equation, Hotel Hyatt, Orlando, Florida, USA, 2008年7月4日

⑤T.Kojima, The Integrals of Motion for the deformed W-algebra,
World Congress for Nonlinear Analysts,
Session: New Directions in Nonlinear Partial Differential Equations, Hotel Hyatt, Orlando, Florida, USA, 2008年7月 4日

⑥T.Kojima, The Integrals of Motion for the Deformed W-algebra,
International Conference on Geometry, Symmetry and Quantization, Varna, Bulgaria,2008年6 月10日

⑦ T.Kojima, The Integrals of Motion for the Deformed W-Algebra,
Seminar at Australian National University, Canberra, Australia, 2008年3月20日

⑧ T.Kojima, The Integrals of Motion for the Deformed W-Algebra,
Seminar at Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Science, St. Petersburg, Russia、 2007年3月17日

⑨T.Kojima, The Integrals of Motion for the Deformed W-algebra, 表現論シンポジウム、熱海、日本、2006年11月 16日

〔その他〕

ホームページ：
http://www.math.cst.nihon-u.ac.jp/~kojima
(http://www.trout.cst.nihon-u.ac.jp/~kojima)

６．研究組織

(1)研究代表者
小島　武夫 (KOJIMA　TAKEO)
日本大学・理工学部・講師
研究者番号：80307800

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし