

平成 21年 6月 5日現在

研究種目：若手研究(B)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18740093
 研究課題名（和文） 相互拡散項を伴うロトカ・ボルテラ系の解構造に対する研究
 研究課題名（英文） Study on the structure of solutions for the Lotka-Volterra system with cross-diffusion
 研究代表者
 久藤 衡介（KUTO KOUSUKE）
 福岡工業大学・工学部・准教授
 研究者番号：40386602

研究成果の概要：

相互拡散(cross-diffusion)を伴うロトカ・ボルテラ系に対して定常解の大域分岐構造が得られた。捕食生物と餌となる生物の個体数密度がなす時空的ダイナミクスを記述する系においては、それぞれの生物の空間的拡散や捕食に関する相互作用の地域差に応じて、生物が共存する定常解がなす分岐枝が釣り針状に変形し、解が複数個存在することが判明した。また、分数型の相互拡散を伴う系においては、相互拡散項の増大に応じて、共存定常解が2種類のサイズに分類されることが分かった。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,300,000	0	1,300,000
2007年度	1,200,000	0	1,200,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	270,000	3,670,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形現象、反応拡散方程式、定常解、分岐、数理生物学モデル

1. 研究開始当初の背景

相互拡散(cross-diffusion)を伴うロトカ・ボルテラ系は、同じ餌を取り合って競合する2種の生物の棲み分け現象をモデル化するために1979年に重定、川崎、寺本によって提唱された。それ以来、我が国がリードする形で、方程式系の時間大域的な可解性の問題や生物が共存する定常解（共存定常解）の分岐構造に対する研究が盛んに続けられていた。（相互拡散の解析に取り組む研究者は、提唱者たちに敬意をこめ時上記の方程式系を「SKTモデル」と呼ぶようになった。）その一方で、SKTモデルをはじめ、非線形な相互

拡散を伴うロトカ・ボルテラ系は、線形拡散の場合と比べると偏微分方程式における従来の手法が通用しないケースが多く、系の時間大域的な可解性や共存定常解の分岐構造については部分的な解答が報告されるにとどまっていた。その意味で、生物の個体数ダイナミクスを再現する解の性質を導出することのみならず、相互拡散に対する汎用的な解析手法の開発が待たれる状況にあった。

2. 研究の目的

(1) 相互拡散を伴うロトカ・ボルテラ系に対

して、共存定常解の分岐や安定性の立場から研究を進め、相互拡散の非線形メカニズムの解明に寄与する。

(2) 相互拡散を伴うロトカ・ボルテラ系を解析することによって、例えば、捕食生物と餌となる生物の空間パターンを再現する解の構成を目指す。

(3) 共存定常解に対する安定性解析を通じて、既存の結果が乏しい相互拡散系の解の時間発展に関して、新たな研究成果を導く。

3. 研究の方法

(1) 捕食生物と餌となる生物の個体数密度を記述するロトカ・ボルテラ系において、餌が多い地域では捕食生物の拡散が抑制されるような「分数型拡散」を導入する。そして、分数型拡散の効果（捕食生物の拡散に対する抑制効果）を増大させたときに、捕食生物と餌となる生物が共存するような定常解のなす分岐枝の形状や安定性がどのように変化するかを調査する。分岐理論を用いて、共存定常解が半自明解（捕食生物もしくは餌となる生物が死滅した定常状態）から分岐する様子を、分岐点や分岐の向きを主眼に解析する。また、共存定常解の最大値が分数型拡散に依存しないことをエネルギー法を用いて証明する。さらに、最大値の一様有界性を手掛かりとして、共存定常解の分岐枝を大域的に追跡する。

(2) 上記のロトカ・ボルテラ系において、分数型拡散が共存定常解に及ぼす非線形効果を抽出するために、分数型拡散の係数を無限大とした極限系を導入する。極限系は、元々の分数型拡散を伴うロトカ・ボルテラ系に比べるとパラメーターがへっているのので、詳細な解構造が得られることが期待できる。極限系の正值解の摂動によって、分数型拡散が大きいケースの共存定常解を得る。

(3) ロトカ・ボルテラ系において、餌となる生物が捕食生物から逃げる効果を相互拡散によってモデル化する。その際、SKTモデルで導入された伝統的な相互拡散項に対して、餌の逃げやすさに地域差があるような環境関数を付加する。そして、相互拡散や環境関数の形状に応じて、共存定常解のなす分岐枝や安定性がどのように変化するかを解析する。分岐理論を用いて、共存定常解が半自明から分岐する様子をパラメーター表示することから着手する。

(4) (3)で導出した系において、相互拡散と環境関数が共存定常解の大域分岐構造に与

える非線形メカニズムを解明するために、環境関数を付加した相互拡散を無限大としたときの分岐枝の漸近挙動を調べる。リアプノフ・シュミットの方法を用いて、共存定常解のなす分岐枝を、有限次元空間の曲線で近似する。さらに、近似曲線の表示を手掛かりに、線形化固有値問題のスペクトル分布を調べ、共存定常解の安定性を判定する。

4. 研究成果

(1) 捕食生物と餌となる生物の個体数密度の時空的变化を記述するロトカ・ボルテラ系において、捕食生物の空間的拡散が餌の多い地域では抑えられると考えるのは自然である。そこで、そのような拡散の抑制を、分数型の相互拡散として導入したロトカ・ボルテラ系を研究した。特筆すべき研究成果は、共存定常解の大域分岐構造が得られたことである。研究期間の初年度においては、共存定常解の最大値が分数型相互拡散には無関係な定数で抑えられることをエネルギー法とソボレフの埋蔵定理を用いて証明した。この成果は、私と門田智仁氏が2005年に得ていた共存定常解に対する先験的評価を大幅に改善するもので、分岐枝の大域挙動を抽出する際にも有力な手掛かりとなった。

(2) 分数型の相互拡散を伴うロトカ・ボルテラ系において、捕食生物と餌食となる生物が共存する定常解のなす分岐枝は、捕食生物の増殖率（死亡率）に関して有界であることを証明した。具体的には、共存定常解の分岐枝は、捕食生物の増殖率を分岐パラメーターとしたとき、ある「負の分岐点」で捕食生物が死滅している半自明から分岐して、「正の分岐点」で餌となる生物が死滅する分岐点に結合するような連結集合を成すことが判明した。この成果を生物モデルの見地から解釈すると、捕食生物と餌となる生物は、捕食生物の増殖率あるいは死亡率が低いときには、両者が共存する定常状態が実現されるということである。さらに、捕食生物が餌が多い地域で拡散が抑制される効果（分数型の相互拡散の効果）が強まると、死亡率がより高くても両者が共存できる定常解が存在することが分かった。

(3) 分数型の相互拡散の増大に応じて、共存定常解の分岐枝の形状がどのように変化するかを調べるために、相互拡散の効果を無限大とした極限方程式を導出した。具体的には、捕食生物が餌が多い地域で拡散が抑制される効果が無限大に発散すると、共存定常解は2種類ある極限方程式のいずれかの正值解に収束することが判明した。2種類の極限方程式の片方は、線形拡散のロトカ・ボルテ

ラ系であって、既存の研究によって解構造が知られている。もう一方の極限方程式は、分数型の相互拡散系であるが、元の系と比較するとパラメーターが減って解析しやすくなっている。本研究においては、この極限方程式の正值解がなす分岐枝を得ている。結局、捕食生物の拡散が餌が多い地域で急激に抑制されると、共存定常解は極限方程式の正值解からの摂動として、2種類に分類されることが分かった。この成果を詳しく述べると、捕食生物の増殖率に対する閾値が存在して、増殖率その閾値より低いケースでは、線形拡散の正值解で摂動される。一方で、増殖率が閾値より高くなると、分数型の相互拡散を伴う極限系の正值解によって、共存定常解が特徴付けられる。なお、捕食生物の増殖率が閾値より高いケースにおいては、餌となる生物の個体数密度はひじょうに低くなっている。したがって、共存定常解の分岐枝は、餌となる生物の個体数密度に関して閾値を境に激減することが判明した。

(4) 異なる生物種の相互作用に地域格差があるのは自然な状況だが、相互拡散 (cross-diffusion) や捕食等の相互作用 (interaction) の地域格差が、共存定常解のなす分岐構造にもたらす非線形効果の数理的抽出を目指し、モデル方程式の提唱とその解析を行った。具体的には、餌となる生物が捕食生物から「逃げやすい地域」と「逃げにくい地域」を、SKTモデルの相互拡散に付加する環境関数 (空間非一様な係数関数) の大小でモデル化した。同様に、捕食生物が餌を「捕食しやすい地域」と「捕食しづらい地域」を反応項の相互作用にかかる環境関数の大小でモデル化した。特筆すべき研究成果として、餌となる生物が逃げやすい地域と捕食生物が捕食しやすい地域が互いに隔離されると、共存定常解のなす分岐枝が曲がり、捕食生物は比較的高い死亡率にあっても生存可能であることが示唆された。

(5) 生物種の相互作用に空間非一様性を考慮したロトカ・ボルテラ系に対して、共存定常解のなす大域分岐構造を解析した。まずは、共存定常解に対する先験的評価を手掛け、ハルナック不等式を応用して、共存定常解の最大値が相互拡散に無関係に有界であることを示した。次に、共存定常解の一様有界性と分岐理論を用いて、分岐枝がふたつの半自明解をつなぐ有界な連結集合を形成することを証明した。

(6) 生物種の相互作用に対する地域格差が共存定常解の分岐枝に与える非線形効果を引き出すために、相互拡散を無限大にしたと

きの分岐枝の漸近挙動を解析した。相互拡散を無限大にすると、ソボレフ空間にある分岐枝が、有限次元空間の成分とその捕空間の成分に分解できて、ある条件の下では、分岐枝を有限次元空間の曲線で近似することに成功した。さらに、有限次元空間の曲線表示を詳しく調べることによって、共存定常解の分岐枝の形状を得ることができた。特に、餌となる生物が逃げやすい地域と捕食生物が捕食しやすい地域が隔離されると、共存定常解の分岐枝が釣り針状に変形し、解が複数個存在しうることが判明した。この結果は、上記の隔離によって、捕食生物は死亡率が比較的高い状況にあっても生存できることを示唆している。

(7) 上記の釣り針型の分岐枝上の共存定常解に対して安定性解析を行った。その結果、捕食生物のダイナミクスが被食生物のそれよりも遥かに速い場合は、釣り針型分岐枝上の全ての共存定常解の安定性が決定された。一方で、捕食生物のダイナミクスが被食生物のそれよりも遥かに遅い場合は、釣り針型分岐枝から時間周期解がホップ分岐することが証明された。相互拡散を伴うロトカ・ボルテラ系では定常解の安定性についての研究報告が乏しかったことから、本研究成果は、今後の相互拡散系の安定性解析に寄与できると期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① Kousuke Kuto, Yoshio Yamada, Coexistence problem for a prey-predator model with density-dependent diffusion, *Nonlinear Analysis, Series A: Theory, Methods and Applications*, (Available online), 2009, 査読有り.
- ② Kousuke Kuto, Yoshio Yamada, Limiting characterization of stationary solutions for a prey-predator model with nonlinear diffusion of fractional type, *Differential and Integral Equations*, 22, 725-752, 2009, 査読有り.
- ③ Kousuke Kuto, Stability and Hopf bifurcation of coexistence steady-states to an SKT model in spatially heterogeneous environment, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 24, 489-509, 2009, 査読有り.

- ④ Kousuke Kuto, Bifurcation branch of stationary solutions for a Lotka-Volterra cross-diffusion system in a spatially heterogeneous environment, *Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications*, 10, 943-965, 2009, 査読有り.
- ⑤ Naoko Kurata, Kousuke Kuto, Koichi Otsuki, Tohru Tsujikawa, Tatsunari Sakurai, Bifurcation phenomena of pattern solution to Mimura-Tsujikawa model in one dimension, *GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications*, 29, 265-278, 2008, 査読有り.
- ⑥ Kousuke Kuto, A strongly coupled diffusion effect on the stationary solution set of a prey-predator model, *Advances in Differential Equations*, 12, 145-172, 2007, 査読有り.
- ⑦ Kousuke Kuto, A Lotka-Volterra cross-diffusion model in spatially heterogeneous environments, 京都大学数理解析研究所講究録「現象の数理解析モデルと発展方程式」, 1542, 41-57, 2007, 査読無し.

[学会発表] (計5件)

- ① 久藤衡介, 山田義雄, Limiting characterization for coexistence states to a Lotka-Volterra model with nonlinear diffusion of fractional type, 日本数学会総合分科会関数方程式分科会, 2008年9月25日, 東京工業大学大岡山キャンパス.
- ② Kousuke Kuto, Coexistence problem for a prey-predator model with density-dependence diffusion, The 5th World Congress of Nonlinear Analysts, 2008年7月3日, Orlando, Florida.
- ③ 久藤衡介, Stability of steady-states to the SKT model in a heterogeneous environment, 日本数学会総合分科会関数方程式分科会, 2007年9月24日, 東北大学川内北キャンパス.
- ④ 久藤衡介, 空間非一様な環境下でのLotka-Volterra 交差拡散系に対する定常解, 日本数学会総合分科会関数方程式分科会, 2006年9月20日, 大阪市立大学.

- ⑤ 久藤衡介, Coexistence steady-states of a Lotka-Volterra cross-diffusion system in spatially heterogeneous environment, 第16回日本数理生物学会大会, 2006年9月18日, 九州大学箱崎キャンパス.

[その他]

ホームページ等

<http://www.fit.ac.jp/~kuto/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

久藤 衡介 (KUTO KOUSUKE)

福岡工業大学・工学部・准教授

研究者番号：40386602

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし