

研究種目：若手研究 (B)  
 研究期間：2006～2008  
 課題番号：18740358  
 研究課題名 (和文)  
 拡張磁気流体モデルにおける流れをもつプラズマのトロイダル平衡に関する研究  
 研究課題名 (英文)  
 Studies on toroidal equilibria with flow in extended magnetohydrodynamic models  
 研究代表者  
 伊藤 淳 (ITO ATSUSHI)  
 核融合科学研究所・シミュレーション科学研究部・助教  
 研究者番号：70413987

研究成果の概要：磁場閉じ込め核融合に用いられるトーラス型プラズマにおける巨視的な理想磁気流体平衡に対し、強い流れがあり複数の微視的な効果をもつ新しい平衡モデルを構築し、それらの性質を理論的・数值的に解析した。新しい定式化は、十分に解明されていなかった流れをもつ理想磁気流体平衡に対しても重要な知見を与え、それに対して微視的な効果が付加されたときの流れをもつ平衡の物理的・数学的な性質の変化を詳細に解析することができた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	500,000	0	500,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	150,000	2,350,000

研究分野：プラズマ物理

科研費の分科・細目：プラズマ科学・プラズマ科学

キーワード：プラズマ物理、磁場閉じ込め核融合、プラズマ平衡、電磁流体力学、拡張 MHD、二流体 MHD、トカマク、シア一流

#### 1. 研究開始当初の背景

(1) 磁場閉じ込め核融合プラズマにおいては、燃料注入や加熱のために中性ビームが入射されることによって駆動される流れや、乱流状態から自発的に励起する帯状流などが存在し、これらの流れが不安定性の安定化や乱流抑制などの閉じ込め改善に重要な役割を果たすことが近年明らかになってきた。そのような改善された閉じ込め状態において高温・高密度な中心部とその周辺部を隔てる境界において急峻な温度や密度の変化がみられる。また、プラズマの流れは太陽風や惑星磁気圏などの宇宙プラズマにおいても見

られる普遍的な問題である。これらの核融合プラズマや宇宙空間での希薄なプラズマに共通する特徴は、無衝突に近く巨視的なプラズマの振る舞いを記述する磁気流体 (magnetohydrodynamics, MHD) モデルでは表せない微視的な効果が重要となる現象が見られるという点である。微視的な効果はそのスケール長がプラズマの物理量の勾配のスケール長に近づくときに顕著になる。磁気流体モデルに微視的な効果を導入したものを拡張磁気流体モデルと呼び、微視的・巨視的な現象の相互作用が重要となるマルチスケールなプラズマのダイナミクスを効率よ

く計算するためのシミュレーションモデルとして近年注目されている。プラズマのダイナミクスを理解する上で重要なことに一つ、初期状態あるいは時間発展したあとに到達する最終状態としての平衡状態を知ることがある。また、実験や観測でみられるプラズマの定常的な大域的構造を理解するためにも平衡モデルは重要な役割を果たす。しかし微視的効果を多く含む拡張磁気流体モデルにおいては方程式系が複雑であるため、平衡状態に対する解析は十分になされておらず、拡張モデルに即した平衡理論の構築が望まれていた。

(2) 流れをもつ MHD 平衡のモデルには、軸対称静止平衡を表す Grad-Shafranov (GS) 方程式に流れの効果を導入した一般化 GS 方程式と Bernoulli の法則の連立方程式系があり、ビーム入射によって流れを駆動されたトカマクプラズマや、太陽風プラズマなどの平衡モデルとして用いられている。流れは、遠心力によるプラズマの外側へのずれや、動圧によるプラズマの閉じ込めなどの物理的な性質の他に、平衡方程式に対する数学的性質の変化を引き起こす。静止平衡に対する GS 方程式は楕円型の二階偏微分方程式であるが、圧縮流に対する一般化 GS 方程式は、ポロイダル流速の大きさによって3つの楕円性領域と2つの双曲性領域が現れる。このような性質は平衡方程式の最高階微分の係数で決まるため、Hall 効果や非等方圧力などの微視的な効果の影響によって劇的に変化することが知られている。それまでは各々の微視的効果に対して別々に研究がなされていたため、複数の効果を同時に扱うことは数理的に魅力のある課題でもあった。

## 2. 研究の目的

本研究は、強い流れをもつ磁気流体力学 (MHD) 的プラズマに対して、既存のモデルよりも多くの微視的効果を含んだトロイダル平衡解の性質を解析的及び数値的手法によって明らかにし、実験室系や天体系のプラズマなどの実際の問題により近い平衡モデルを構築することを目的とする。対象とする微視的効果は圧力の非等方性と Hall 電流である。どちらも強い流れが MHD 平衡に及ぼす働きを質的に変化させる効果があることが知られている。これらの効果を同時に含んだ平衡方程式の数学的性質を理論的に解析し解の存在する条件を求め、それに基づいた数値解析を行うことで MHD では説明することのできない新たな流れをもつプラズマのトロイダル平衡に対する理論を構築する。

## 3. 研究の方法

(1) 拡張磁気流体モデルを用いたマルチスケール性をもつ平衡状態の解析の第一段階

として、非等方圧力をもつ一流体および二流体モデルにおける流れをもつ軸対称トロイダル平衡の数学的性質を解析するため、高階の偏微分方程式における波の伝播に関する理論を用いた。非等方な圧力方程式として、イオンの圧力を無視し、質量を無視した電子の圧力に対する無衝突プラズマの3次の流体モーメント方程式である熱流束方程式から得られるものを用いた。この圧力方程式は、従来の熱流束を無視して得られる Chew-Goldberger-Low (CGL) 二重断熱方程式とは異なり、運動論と等しい波の性質を与えることができる。

(2) 流れをもつ軸対称平衡のさらなる拡張のため、イオン温度が有限であることから現れるラーマー半径効果によるジャイロ粘性を表す圧力テンソルの非対角項を含んだ二流体モデルを用いた。前項では、イオン温度をゼロとして電子圧力の非等方性を導入したが、高イオン温度を必要とする核融合プラズマにおいてはイオン温度の効果を考慮に入れる必要がある。流体モーメント方程式から得られるジャイロ粘性の表式は、無衝突に近い高温プラズマでは非常に複雑になるため、平衡方程式を導出するためには簡約化が必要である。まず流速は熱速度に比べて小さいとし、さらに高ベータトカマクに対する簡約化 MHD のオーダーリングを用いた。このオーダーリングではシアアルヴェン波と圧縮性によって起こる遅い磁気音波が含まれる。流速のオーダーをどちらの波の位相速度に合わせるかによって2種類の簡約化平衡モデルが得られる。単純化のため、圧力の対角成分は等方的とした。流速がシアアルヴェン波の位相速度に相当するポロイダルアルヴェン速度程度の場合には、通常簡約化 MHD と同様の手法を用いて定式化を行った。流速が遅い磁気音波の位相速度に相当するポロイダル音速程度の場合には、流れは高次の効果となる。高次効果を含む簡約化 GS 方程式の定式化手法を確立するため、まず一流体 MHD におけるポロイダル音速程度の流れを含む平衡方程式に対し、逆アスペクト比の次数による漸近展開を適用した。

(3) 一流体 MHD に対するポロイダル音速程度の流れをもつ高ベータトカマクプラズマの平衡を表す前項の簡約化方程式系の解析解を求め、その性質を詳細に解析した。逆アスペクト比の次数で漸近展開された方程式系に含まれる最低次の平衡プロファイルは1次の磁束関数の任意関数であり、これらに線形プロファイルを仮定することでポロイダル音速程度の流れをもつ一流体 MHD 平衡の解析解を求めた。固定境界・円形断面を仮定し、トカマク静止平衡における漸近展開された高次の磁束関数に対する GS 方程式の解法を用いた。

(4) ポロイダル音速程度の流れがあるときの有限イオン温度効果をもつ二流体モデルにおける平衡方程式を導出し、数値的・解析的に解の性質を調べた。項(2)で求めた一流体に対する簡約化方程式を拡張して有限イオン温度効果であるジャイロ粘性と反磁性熱流束の効果を導入した。定式化によって得られた方程式系を数値的に解くために、有限要素法を用いたコードを開発した。

#### 4. 研究成果

(1) 流れと電子の圧力非等方性をもつ一流体および二流体平衡に対する偏微分方程式を導出し、それぞれが楕円型となる流速の条件を求めた。ここではイオンの温度は無視した。まず一流体平衡に対して、磁束関数に対するGS型の2階偏微分方程式と、磁力線方向の力の釣合いを表すBernoulliの法則の連立方程式を導出した。そして、この偏微分方程式系の楕円性条件を満たすポロイダル流速の境界値が、CGLモデルを用いた先行研究の結果とは異なり、運動論による波の分散関係から得られる波の速度に対応していることを明らかにした。次にHall MHDモデルにおいて、同様に平衡方程式を導出した。平衡は、磁束関数とイオンの流れ関数のそれぞれに対するGS型の偏微分方程式とイオンの磁力線方向の力の釣合いを表すBernoulliの法則との3つの連立方程式で表される。圧力が等方的な場合には磁束関数に対する方程式は常に楕円型であるため、イオンの流れ関数に対する2階偏微分方程式の楕円性条件を求めればよいが、非等方の場合には4階の偏微分に対して楕円型である条件を求めなければならない。このような高階の偏微分を含む方程式系の楕円性条件は、2次元空間座標の一方を時間、もう一方を1次元空間座標としたときの進行波解が存在しない条件として得ることができる。そのようにしてポロイダル流速に対する楕円性の十分条件が得られ、その境界値は等方圧力の場合には音速であるが、圧力の非等方性が加わった音速よりもわずかに小さい速度であることが明らかになった。

(2) 有限イオン温度効果を含む流れをもつ平衡モデルを構築するため、簡約化GS方程式の定式化を行った。まず、流速がシアアルヴェン波の位相速度に相当するポロイダルアルヴェン速度程度の場合に、平衡方程式を導出した。ポロイダル流は理想MHDの場合のE×Bドリフトに加え、二流体効果によって反磁性ドリフトが生じる。有限イオン温度効果によって平衡方程式中の対流項の反磁性ドリフトの成分が相殺されるgyroviscous cancellationと呼ばれる現象によって、ポロイダル流速がポロイダルアルヴェン速度と等しくなるときに現れる特異点の位置がずれる

ことを明らかにした。次に、一流体MHDにおけるポロイダル音速程度の流れを含む平衡方程式を導出した。逆アスペクト比の次数で漸近展開された磁束関数に対するGS方程式は、1次では流れがない場合の平衡と等しくなり、2次においてポロイダル流速がポロイダル音速と等しくなるときに特異点が現れた。また、流れをもつ平衡では圧力の等値面が磁気面からずれることが知られているが、この効果が圧力の2次の式において再現できた。このようにして、有限イオン温度効果を導入するための拡張が可能なモデルを構築した。

(3) 前項で導出したポロイダル音速程度の流れをもつ簡約化一流体MHD平衡方程式に対し、プラズマのポロイダル断面が円形で固定境界を仮定したときの解析解が得られた。ポロイダル音速で特徴付けられる磁気音波の機構を含む圧縮性と磁場の変形の両方を伴う流れをもつ高ベータトロイダル平衡に対する解析解はこれまでにない新しいものである。この解を用いて、ポロイダル流速に対する磁気軸のプラズマ中心からのずれ(図1)や、圧力の最大値を与える点の磁気軸からのずれ、および高ベータによる平衡限界の変化に関する解析的な表式を示した。これらの式から、

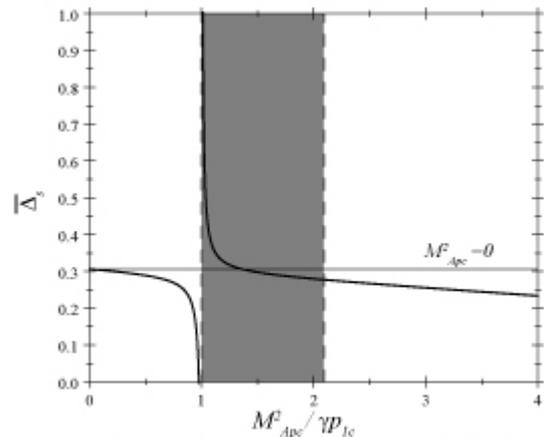


図1: ポロイダルマッハ数(ポロイダル流速とポロイダル音速の比)の自乗 $M_{Apc}^2 / \gamma p_{1c}$ に対する磁気軸のプラズマ中心からのずれ。灰色部分はベータ限界を超過している領域を表す。

ポロイダル流速がポロイダル音速より大きい領域で磁気軸のずれが流れによって増幅され平衡限界を超える解が存在することを明らかにした。図2は、平衡限界を超えた解の例であり、ポロイダル磁場のセパトトリックスがプラズマ内部に存在し閉じ込めが成立していないことを示している。また流れによる圧力の等値面の磁気面からのずれは、ポロイダル流速がポロイダル音速よりも小さいときはトーラス大半径の外向き(図3(a))、大きいときは内向きになる(図3(b))。この機構を遅い磁気音波とプラズマのトロイダル形状に起因するgeodesic acoustic modeの機構との類似性によって説明した。以上の結果によって

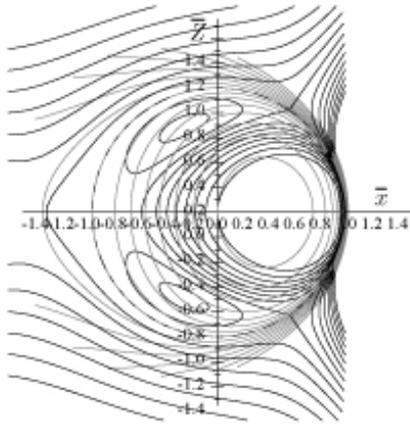


図2：ベータ限界を超過しているポロイダルマッハ数 ( $M_{\text{pol}}^2/\gamma p_{\text{ic}} = 1.05$ ) のときの磁気面 (黒線) と流れがないときの磁気面 (灰色線)。  
、有限イオン温度効果をもつ二流体平衡と比較するための流れをもつ一流体平衡理論を構築した。この解析解は、非簡約化MHD平衡方程式に対する数値解析のベンチマークや流れをもつプラズマの安定性解析などへの応用が期待できる。

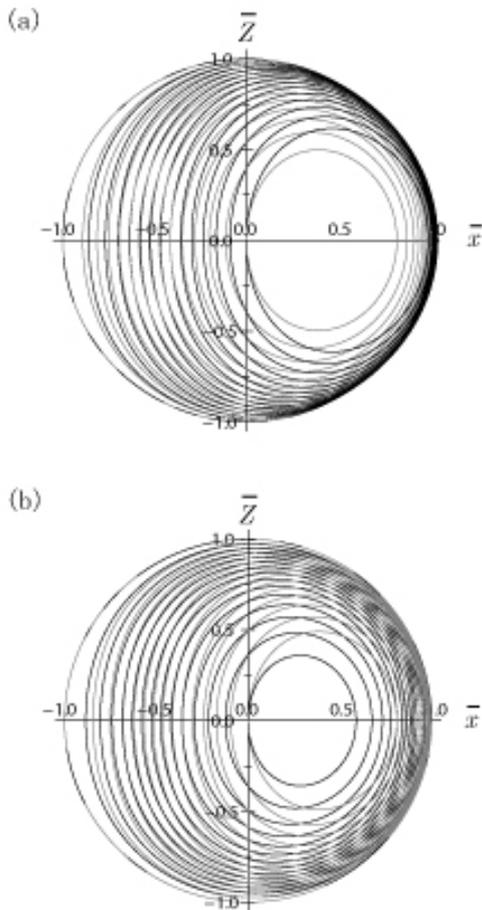


図3：(a)  $M_{\text{pol}}^2/\gamma p_{\text{ic}} = 0.5$ , (b) 2.5のときの圧力の等値面 (黒線) と磁気面 (灰色線)。

(4) ポロイダル音速程度の流れがあるときの有限イオン温度効果をもつ二流体モデルにおける平衡方程式を導出し、数値解析を行った。流れの効果が含まれる2次の磁束関数に対するGS方程式にポロイダルアルヴェン速度程度の流れの場合と同様にgyroviscous cancellationの効果が現れるが、有限イオン温度効果によるポロイダル流速がポロイダル音速と等しくなる時の特異点のずれには、反磁性熱流束の高次の項の寄与も含まれる。有限イオン温度効果がない場合の二流体平衡

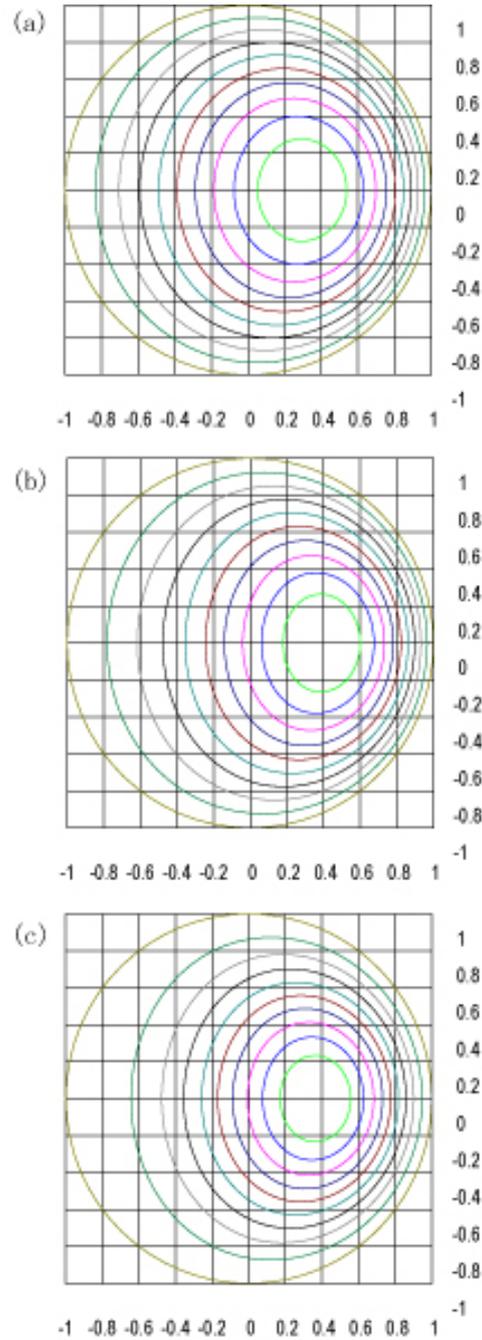


図4：有限イオン温度効果を含む二流体平衡の数値解。(a)磁気面、(b)圧力の等値面、(c)イオン流れ関数の等値面。

において、イオンの磁場への凍りつきが破れるためイオンの流れ関数の等高面が磁気面からずれることが知られているが、この効果にイオン温度効果が加わった表式が、2次のイオンの流れ関数に対して得られた。この方程式を有限要素法によるコードを用いて数値解析を行い、二流体効果による反磁性流が引き起こす流速の特異点のずれとジャイロ粘性による相殺効果の両方が存在することで、前項の一流体平衡の解析解が特異となるポロイダルE×B流速がポロイダル音速と等しい場合に正則な解を得た(図4(a)-(c))。磁気面と等圧力面そしてイオンの流れ関数の数値解(図4(a)-(c))とそれぞれの軸に対する解析的表式によって、これらの等値面が一致しないということと、電場の符号に対して非対称であるという流れをもつ二流体平衡の特徴と反磁性流の大きさとの関係を明らかにした。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Atsushi Ito and Noriyoshi Nakajima, Analytic high-beta tokamak equilibria with poloidal-sonic flow, Plasma Physics and Controlled Fusion, Vol. 51, No. 3, 035007-1, 035007-18, 2009, 査読有
- ② Atsushi Ito and Noriyoshi Nakajima, Effects of Finite Larmor Radius on Equilibria with Flow in Reduced Two-Fluid Models, AIP Conference Proceedings, Vol. 1069, pp. 121, pp. 132, 2008, 査読無
- ③ Atsushi Ito, Jesús J. Ramos and Noriyoshi Nakajima, High-Beta Axisymmetric Equilibria with Flow in Reduced Single-Fluid and Two-Fluid Models, Plasma and Fusion Research, Vol. 3, 034-1, 034-7, 2008, 査読有
- ④ Atsushi Ito, Jesús J. Ramos and Noriyoshi Nakajima, Ellipticity of axisymmetric equilibria with flow and pressure anisotropy in single-fluid and Hall magnetohydrodynamics, Physics of Plasmas, Vol. 14, Iss. 6, 062502-1, 062502-8, 2007, 査読有

[学会発表] (計11件)

- ① Atsushi Ito, High-beta toroidal equilibria with flow in reduced fluid models, 18th International Toki Conference, 2008年12月9日, セラトピア土岐(土岐市)
- ② 伊藤淳, 流れをもつ軸対称二流体平衡に対する有限ラーマー半径効果(II)、日本

物理学会 2008年秋季大会、2008年9月22日、岩手大学(盛岡市)

- ③ Atsushi Ito, Effects of Finite Larmor Radius on Equilibria with Flow in Reduced Two-Fluid Models, Joint Varenna - Lausanne International Workshop on "Theory of Fusion Plasmas", 2008年8月28日, Villa Monastero, Varenna (イタリア)
- ④ 伊藤淳, 簡約化流体モデルにおける流れをもつ高ベータ平衡、第7回核融合エネルギー連合講演会、2008年6月21日、青森市男女共同参画プラザ
- ⑤ 伊藤淳, 流れをもつ軸対称二流体平衡に対する有限ラーマー半径効果、日本物理学会第63回年次大会、2008年3月25日、近畿大学(東大阪市)
- ⑥ 伊藤淳, 簡略化二流体モデルを用いた流れをもつ平衡状態の解析、第24回プラズマ核融合学会年会、2007年11月28日、イーグレひめじ(姫路市)
- ⑦ Atsushi Ito, Axisymmetric equilibria with flow in reduced two-fluid models, Joint Conference of 17<sup>th</sup> International Toki Conference and 16<sup>th</sup> International Stellarator/Heliotron Workshop, 2007年10月17日, セラトピア土岐(土岐市)
- ⑧ 伊藤淳, 簡略化二流体モデルを用いた平衡解析、日本物理学会第62回年次大会、2007年9月22日、北海道大学(札幌市)
- ⑨ Atsushi Ito, Axisymmetric equilibrium with flow and pressure anisotropy in Hall MHD, The 48th Annual Meeting of the Division of Plasma Physics, the American Physical Society, 2006年11月2日, Philadelphia (アメリカ)
- ⑩ 伊藤淳, 流れをもつ軸対称トロイダル平衡と磁気流体モデル、日本物理学会2006年秋季大会、千葉大学(千葉市)、2006年9月24日
- ⑪ 伊藤淳, 拡張磁気流体モデルにおける軸対称トロイダル平衡流、第6回核融合エネルギー連合講演会、富山国際会議場、2006年6月13日

[その他]

ホームページ等

<http://www.dss.nifs.ac.jp/atsushi/>

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

伊藤 淳 (ITO ATSUSHI)

核融合科学研究所・シミュレーション科学研究部・助教

研究者番号: 70413987

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3)連携研究者  
( )

研究者番号：