

平成 21 年 6 月 1 日現在

研究種目： 若手研究 (B)
研究期間： 2006~2008
課題番号： 18749001
研究課題名 (和文) 特殊函数の対称性を記述する代数構造の研究
研究課題名 (英文) Algebraic structure of special functions
研究代表者
西澤 道知 (NISHIZAWA MICHITOMO)
弘前大学・教育学部・准教授
研究者番号： 20318801

研究成果の概要：可積分な差分方程式の解の構成への応用を意識して、多変数直交多項式と一般化されたガンマ函数の対称性についての研究を行った。直交多項式に関しては、二重アフィンヘッケ代数のある種の退化の表現を用いて shifted ジャック多項式を構成し、有理型の量子 Kniznik-Zamolodchikov 方程式の多項式解を構成した (笥三郎氏、斉藤義久氏、竹山美宏氏との共同研究)。多重ガンマ函数の無限積表示、それに関連する多重ベルヌーイ数の関係式についての結果について、論文を準備中である。これらの可積分系、組み合わせ論などへの応用は今後の課題である。

交付額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|---------|-----------|---------|-----------|
| 2006 年度 | 1,100,000 | 0 | 1,100,000 |
| 2007 年度 | 1,000,000 | 0 | 1,000,000 |
| 2008 年度 | 457,296 | 270,000 | 727,296 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 2,557,296 | 270,000 | 2,827,296 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：特殊函数論、可積分系

1. 研究開始当初の背景

量子可積分系、離散可積分系の解を構成するために、直交多項式やガンマ函数などの

特殊函数が用いられてきた。特殊函数についての性質を、それらの持つ対称性という視点から調べることで、新たな有用な函数

を見つけ、可積分系に応用するということが行われてきた。本課題で着目した

(1) 直交多項式の表現論を通じた理解
(2) ガンマ函数もしくはその一般化の保型性を通じた理解 という観点から研究開始当初の背景を説明する：

- (1) 1990 年前後に、Macdonald 多項式と呼ばれる多変数多項式を二重アフィンヘッケ代数の表現論を通じて解釈することで、その直交性、漸化式と差分方程式の双対性が Cherednik らによって示された。その後、いくつかの多変数直交多項式については、同様に表現論を通じて構造を調べる方法は成果を収めたが、未だそのような方法で理解されていない多項式もあり、また、表現論から構成しうる新たな多項式の存在の可能性もあった。二重アフィンヘッケ代数の表現論を応用し量子 Kniznik - Zamolodchikov 方程式の多項式解が構成しうるということが、竹山氏、笠谷氏によって示されていた。
- (2) ガンマ函数を含む特殊函数のクラスとして、20 世紀初等に定義された多重ガンマ関数と呼ばれるものがある。このうちの特殊なクラスに関しては、その無限積表示と q 類似が見つかっているが、一般の場合にも同様のものがあるかはわかっていなかった。楕円ガンマ函数は Ruijsenaar 氏によって定義され、その保型性は Felder 氏、Varchenko 氏によって示された。楕円ガンマ函数の多重化は申請者によって定義され、成川氏によって多重ベルヌーイ数を用いた保型性の関係式が示された。しかし、それを代数的もしくは幾何的に解釈するという問題は残っていた。また、多重楕円ガンマ函数の可積分系への応用

も期待されていた。

2. 研究の目的

特殊函数、特に、多変数直交多項式と、一般化されたガンマ函数の性質、関係式をより統一的な代数構造に着目することにより解釈する。また、それらを量子可積分系、離散可積分系に現れる差分方程式の解の構成に応用する。

3. 研究の方法

(1) 直交多項式を退化二重アフィンヘッケ代数、または退化楕円ヘッケ代数の表現論を通して理解する。Askey-Wilson 多項式のパラメタに対応する二重アフィンヘッケ代数の退化を定義し、この多項式表現を構成する。これにより、代数の双対性と漸化式、差分方程式の関係を調べる。さらに、この構造を多変数化し、一変数の直交多項式の退化関式である Askey スキームに現れる多項式が多変数化を退化二重アフィンヘッケ代数、もしくは退化楕円ヘッケ代数の多項式表現を用いて構成する。これらの多項式を用いて、量子 Kniznik - Zamolodchikov 方程式の多項式解や、可積分な差分方程式の多項式解を構成するなど、可積分系への応用を考察する。

(2) 一般化されたガンマ函数について、無限積表示や保型性などの性質を調べる。まずは、Barnes の多重ガンマ函数と呼ばれるクラスの函数の無限積表示を調べる。そのために必要な多重ベルヌーイ多項式の恒等式を数式処理等による計算機実験で予測し、証明する。この無限積表示をもとに、Barnes の多重ガンマ函数の q -類似を

構成する。さらに、楕円ガンマ函数の保型性について従来の結果をより深く考察し、そこからの知見を通じて、平面分割、多重分割などに現れる組み合わせ論的数の合同性や漸近挙動、無限級数表示などの性質を調べる。

4. 研究成果

(1) 二重アフィンヘッケ代数のある種の退化の表現を用いて shifted ジャック多項式を構成し、有理型の量子 Kniznik - Zamolodchikov 方程式の多項式解を構成した (寛三郎氏、斉藤義久氏、竹山美宏氏との共同研究)。これは、直交多項式の表現論を通じた理解の範囲を広げたこと、また、可積分系への応用を示したことで意義があったものと思われる。同様のアイデアが、他のルート系の場合や q -差分の場合などに、より広範囲に拡張できる可能性があり、今後の発展が期待される。この他に、楕円ワイル群、楕円ヘッケ代数の多項式表現を通して多変数直交多項式を理解する試みや、パラメタの退化によって、直交多項式を記述する代数がどのように退化するかを試みを行った。

(2) 多重ガンマ函数の無限積表示、それに関連する多重ベルヌーイ数についての研究を行った。多重ベルヌーイ数の関係式で証明が終わらないものもあり、予定されていた期間内に決定的な結果とならなかったが、それらが解決し次第、論文にまとめるように準備を進めたい。また、無限積表示を通じて、今までに定式化できなかった種類の、Barnes の多重ガンマ函数の q -類似を構成する見通しが生まれた。多重ベルヌーイ数の関係式や保型性は

組み合わせ論的数の合同性への応用が期待されるが、これはこれからの課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① S. Kakei, M. Nishizawa, Y. Saito, Y. Takeyama,
“*The rational qKZ equation and shifted non-symmetric Jack polynomials*”,
Symmetry, Integrability and Geometry : Method and Applications 5 (2009), 010, 査読有

[学会発表] (計 1 件)

- ① 寛三郎、西澤道知、斉藤義久、竹山美宏 (発表: 竹山美宏氏)、
The rational qKZ equation and shifted non-symmetric Jack polynomials”,
日本数学会総会、2009 年 3 月、東京大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西澤道知 (NISHIZAWA MICHITOMO)
弘前大学・教育学部・准教授
研究者番号: 20318801

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

