様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年　3 月　3 日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：2006∼2008
課題番号：18760148
研究課題名（和文）　粗視化に基づくメゾスコピックな乱流遷移機構の解明と応用

研究課題名（英文）　Coarse-graining approach to the mesoscopic mechanism of transition to turbulence and its application

研究代表者 石田 秀士（ISHIDA HIDESHI）
大阪大学・大学院基礎工学研究科・助教
研究者番号：80283737

研究成果の概要：本研究では粗視化に基づいて中間スケール的(mesoscopic)に乱流遷移機構を解明することを目的に，確率測度の master 方程式表現に基づく局所エントロピー方程式を導出し，この局所エントロピー方程式の各項を巨視的微少領域上で積分するか，アンサンブル平均することで巨視的熱力学量の振る舞いを説明するできることを証明した．この過程でエントロピー増大の法則に相当する全体系におけるエントロピー生成の正値性を非平衡・非定常状態で証明することに世界で初めて成功した．この成果は最終的な乱流遷移機構の解明をはじめ，乱流に対する力学系的アプローチの適用性をより高めるものとして期待される．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	600,000	0	600,000
2007 年度	1,700,000	0	1,700,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,900,000	180,000	3,080,000

研究分野：工学
科研費の分科・細目：機械工学・熱工学
キーワード：粗視化，中間スケール系，乱流遷移，マスター方程式，局所エントロピー，エントロピー生成，散逸系，位相空間膨張率

１．研究開始当初の背景

研究代表者らはこれまで自然対流場の線形安定性に基づく不安定化やカオス化についての実験的・数値的検討を集中的に行ってきたしかしながら例えば鉛直平板に埋め込まれた線熱源上方の自然対流場においては乱流の遷移する高さ（グラスホフ数）のポイントは線形安定性の上での中立ポイントより高く，また左右に温度差を設けた矩形領域内部の流れにおいては流れがカオスとなる温度差（レイレー数）は乱流となる温度差に比べて小さい．これらの研究はエネルギーが投入されるマクロスケールの現象の実験・解析を行い，カオスや線形安定性解析における不安定に基づいて乱流遷移を説明しようとする立場で行われているが，上に述べたようにこれには限界があることが明らかとなっている．

一方運動エネルギーの散逸を担う最もミ

クロな構造としてコルモゴロフスケールにおける微細構造（渦構造）が知られており，この構造の振る舞いから乱流への遷移を明らかにしようとする立場の研究も多く行われている．しかしながらこの構造は層流においてもすでに現れており，きわめて小さな流速（レイノルズ数）においてもその振る舞いはカオス的で，代表的な不安定周期解上のアンサンブル平均を取ることにより乱流理論でよく知られている高波数領域（ミクロスケール）におけるエネルギー散逸スペクトルを再現できることが知られている．このことは逆にいえば流速を上げて初めて現れる“乱流”として観察される状態はこのような微視的スケールの現象からではすべてを説明できない可能性を示唆しているといえる．

２．研究の目的

本研究は乱流場において平均エネルギーが投入される代表スケールと散逸を担う微細構造のスケールであるコルモゴロフスケールの間に中間スケール的な（メゾスコピック）系を置き，この系の上で粗視化された（粗く見た）流体の振る舞いを統計熱力学的に分析することで層流から乱流への遷移のメカニズムを明らかにしようとする試みである．これまでの乱流研究は主として直接シミュレーションなどコルモゴロフスケールで行われており，流れの基本秩序構造は明らかになってきているが，我々が“乱流”でイメージする乱雑な流れはいわゆる大規模構造であり，これを理解するためには従来の分析方法は有効ではないと考える．著者らは修正されたローレンツモデルにおいて位相空間を有限のパーティションに分割，すなわち粗視化を行い，不可逆過程が進行する過程において，エントロピー生成を一般化した情報量生成により巨視量で指定される巨視的非定常変化を実現するメカニズムが説明されうることを世界ではじめて明らかにした．本研究では代表スケールとコルモゴロフスケールの間のスケールで流れ場をこのような粗視化，すなわち空間を有限の大きさのパーティションに分割し，そのパーティション同士の力学モデルを構築し，その挙動を非線形力学，統計熱力学的に分析することにより上述の大規模構造を理解することを目的としている．

３．研究の方法

本研究では位相空間を複数のパーティションに分割し，その内部での確率分布を一様（離散確率密度）とみなす粗視化を施す．このアプローチではパーティション内部の確率測度の構造を扱わないという意味では巨視的であるが，このパーティションの大きさは巨視的に微少な領域に比べると十分小さい中間スケール的 mesoscopic な扱いである．微視的力学系の方程式からこのパーティション上で定義された確率測度の発展方程式が master 方程式に近似できると仮定する．この仮定は Dellnitz らの理論に基づいており，極めて多くの力学系に適用可能であると考えられる．この master 方程式から局所エントロピーの輸送方程式を導出し，この方程式の各項を巨視的微少領域上で積分，もしくはアンサンブル平均し，パーティションの大きさを０の極限をとった（熱力学的極限）ものと巨視的物理量との対応関係を調べる．

４．研究成果

一般に master 方程式

$$\frac{dP_i}{dt} = -\sum_j (W_{ji}P_i - W_{ij}P_j) \qquad (1)$$

から求まる局所エントロピーの輸送方程式は，この量の時間変化項である非定常項に加え，対流項，拡散項，位相空間膨張率項，エントロピー生成項，対称残余項，歪対称残余項の７項に分解される．

$$\Delta V_i \frac{ds_i}{dt} = C_i + D_i + VE_i + S_{p,i} + r_{s,i} + r_{a,i} \qquad (2)$$

各項は次のような物理的意味を持つ

(対流) $C_i \equiv -\sum_j \frac{\tilde{U}_{j\leftarrow i}}{\Delta_{i,j}} \frac{s_i + s_j}{2}$

(拡散) $D_i \equiv \sum_j \frac{\tilde{D}_{i,j}}{\Delta_{i,j}^{\ 2}} (s_j - s_i)$

(位相空間膨張） $VE_i \equiv \rho_i \sum_j \frac{\tilde{U}_{j\leftarrow i}}{\Delta_{i,j}} = P_i \sum_j \frac{U_{j\leftarrow i}}{\Delta_{i,j}}$

（エントロピー生成） $S_{p,i} \equiv \sum_j \frac{\tilde{D}_{i,j}}{\Delta_{i,j}^{\ 2}} \frac{(\rho_j - \rho_i)^2}{\rho_j + \rho_i}$

（対称残余項） $r_{s,i} \equiv -\sum_j \frac{J_{j\leftarrow i}}{\Delta_{i,j}} l_{j,i}$

（歪対称残余項） $r_{a,i} \equiv -\sum_j \frac{\tilde{U}_{j\leftarrow i}}{2\Delta_{i,j}} \frac{(\rho_j - \rho_i)^2}{\rho_j + \rho_i}$

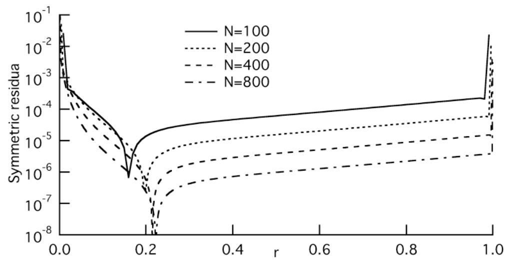
$$-\sum_j \left[\frac{\tilde{U}_{j\leftarrow i}}{\Delta_{i,j}} \frac{\rho_j - \rho_i}{2} - \frac{\tilde{D}_{i,j}}{\Delta_{i,j}^{\ 2}} (\rho_j + \rho_i) \right] l_{j,i}$$

$$l_{j,i} \equiv \left(\frac{\ln \rho_j - \ln \rho_i}{2} - \frac{\rho_j - \rho_i}{\rho_j + \rho_i} \right)$$

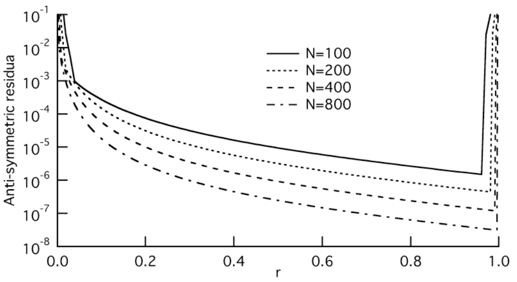
ここで $\tilde{U}_{j\leftarrow i}$，$\tilde{D}_{i,j}$ はそれぞれ局所速度，局所拡散係数の意味を持っており，修正された遷移確率 $\tilde{W}_{ji} \equiv W_{ji} \Delta V_i$ ならびに i,j 分割間の距離 $\Delta_{i,j}$ により

$\tilde{U}_{j\leftarrow i} \equiv (\tilde{W}_{ji} - \tilde{W}_{ij})\Delta_{i,j}$,　$\tilde{D}_{i,j} \equiv (\tilde{W}_{ji} + \tilde{W}_{ij}) / (2\Delta_{i,j}{}^{2})$
と表現される．これらの量は Kramers-Moyal 展開における 1 次，2 次モーメントにより理解される．

全体系においては歪対称残余項は積分すると０になるので，全体系のエントロピー生成に関与するのは常に０以上（平衡状態で０）のエントロピー生成項と対称残余項である．研究代表者はこのような分解法を Drift を有する一般的なマルチベーカー鎖系に適用し，熱力学的極限をとるとき図１に示されるとおり，（歪）対称残余項は消失してエントロピー生成は正となり，図２に示されるようにエントロピー生成項を積分した量が巨視的熱力学によって評価されるエントロピー生成に均しくなることを世界で初めて証明した(H. Ishida, Physica A, 388 (2009), 332.). これはエントロピー生成の正値性を非平衡・非定常状態で一般的に証明したものであり，いわゆるエントロピー増大の法則の証明に相当する．



(a) Symmetric residual



(b) Anti-symmetric residual

Fig.1 Symmetric and anti-symmetric residua

(N が大きくなるにつれて，すなわち粗視化のスケールが小さくなるにつれて対称残余項の大きさは小さくなっていく．これは熱力学的極限において正のエントロピー生成項が全エントロピー生成において支配的となることを意味している．[Ishida (2009)])

この検討は保存系(Hamilton 系)で行ったが，散逸系に対して上述の局所エントロピーの方程式の各項を評価したところ，外場を加えることによって巨視的に生じる位相空間膨張率が位相空間膨張率項から評価できることが明らかとなった．これは散逸系に対して上述の局所エントロピー方程式の分解法が有効であることを意味している．

乱流は散逸系であり，これを粗視化した力学系は本研究で扱ったマルチベーカーマップで近似できるので，今年度までの研究により mesoscopic に外場の影響，例えばクエット流における壁面移動による各種の巨視的統計量が局所エントロピー方程式の位相空間膨張率項を通じて微視的メカニズムにより説明できることが明らかとなった．この成果は最終的な乱流遷移機構の解明をはじめ，乱流に対する力学系的アプローチの適用性をより高めるものとして期待される．

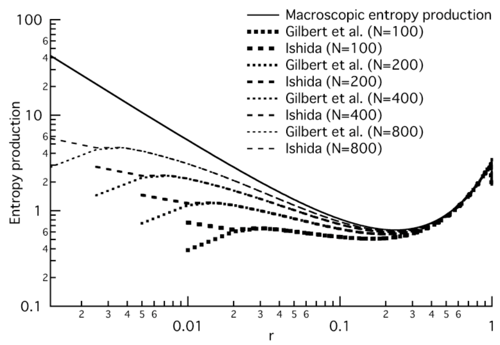


Fig.2 Entropy production

(N が大きくなるにつれて, 微視的量から見積もられるエントロピー生成量[波線]は巨視的熱力学から評価される値[実線]に近づいていく．[Ishida (2009)])

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）
H. Ishida, “A decomposed equation for local entropy and entropy production in volume -preserving coarse-grained systems”, Physica A, 388 (2009), 332-342.

〔学会発表〕（計 ２件）
① 石田秀士，”正のエントロピー生成“，第３回非線形テクノサイエンス講演会, ３月１４-１５日,千里ライフサイエンスセンター, 2008.

② H. Ishida, “A decomposed equation for local entropy and entropy production in any coarse-grained system”, presented in Statphys 23, July 9-13, Genova, Italy, 2007.

６．研究組織
(1)研究代表者
石田 秀士　(ISHIDA HIDESHI)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・助教
研究者番号: 80283737

(2)研究分担者

(3)連携研究者