

令和 6 年 6 月 21 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01107

研究課題名(和文) 法 p 表現とHecke環の表現論研究課題名(英文) Mod p representation theory and representation theory of Hecke algebras

研究代表者

阿部 紀行 (Abe, Noriyuki)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：00553629

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,100,000円

研究成果の概要(和文)： p 進群の法 p 表現論を，プロ p 岩堀Hecke環の表現論と関連付けることにより調べ，法 p Langlands対応への貢献を行うことを目標として研究を行った．すでにプロ p 岩堀Hecke環の既約表現と既約法 p 表現が部分的に対応することは知られていたが，この対応を圏のレベルでの対応にアップグレードした．その他，コンパクト開部分群の表現論を調べることを目的として，簡約代数群の代数的な表現の理論を研究し，その構造を記述するHecke圏の新しい実現を与えた．また，法 p 表現同様に重要な p 進Banach表現に関連してその主系列表現の既約性に関する研究(Florian Herzig氏との共同研究)を行った．

研究成果の学術的意義や社会的意義

法 p 表現は単に既約表現自身だけではなくその圏論的性質も重要と思われる．それをプロ p 岩堀Hecke環と関連付けた成果は一定の価値があると思われる．Hecke圏の新しい実現はすでに簡約代数群の表現圏へのHecke作用の構成などへの応用を持ち，今後さらに活用されていくと期待している． p 進Banach主系列表現の既約性はこれまで殆ど知られていなかった．新たな知見を持ち込んだ本研究は意義深いと考えている．

研究成果の概要(英文)：I studied the theory of mod p representations of p -adic groups by linking it to the representation theory of pro- p Iwahori-Hecke algebras with the goal of contributing to the mod p Langlands correspondence. While it was already known that there was a partial correspondence between the irreducible representations of the pro- p Iwahori-Hecke algebra and the irreducible mod p representations, I upgraded this correspondence to a categorical level.

Furthermore, with the aim of investigating the representation theory of compact open subgroups, I studied the theory of algebraic representations of reductive algebraic groups and provided a new realization of the Hecke category that describes the structure of algebraic representations. As a joint work with F. Herzig, I studied the irreducibility of principal series representations of p -adic Banach representations, which are as significant as mod p representations.

研究分野：表現論

キーワード： p 進簡約群 既約表現 法 p 表現

1. 研究開始当初の背景

保型表現と Galois 表現との対応を主張する Langlands 対応の確立は、Fermat 予想などをその帰結とする大問題の一つである。その、特に局所的なバージョンの定式化には p 進群の表現論が現れる。従来の Langlands 対応を考える場合には複素数体上の表現が用いられるのだが、21 世紀に入ることから、この表現を p 進体または標数 p の体の上で考えることの重要性が指摘され、対応して p 進 Langlands 対応や法 p Langlands 対応の確立という問題が発生した。これらの理論は $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の場合には多くの研究者により満足のいく理論が得られ、大きく応用されているが、これを越えた場合はまだまだわからないことが多い。

本研究計画でのターゲットは主に p 進群の法 p 表現論である。この分野の研究は GL_2 の場合の Barthel-Livné による研究に始まる。その中で、超特異許容表現という表現のクラスが定義され、既約許容表現の分類を超特異既約許容表現の分類に帰着させる定理(分類定理)が示された。この結果は Herzig により大きく一般化され、 GL_n の場合に同様の理論が示された。さらに私による分裂型の場合への一般化や、また小さなランクの群に対する研究などを経て、最終的に私と G. Henniart, F. Herzig, M.-F. Vignéras との共同研究で一般の簡約群の場合に拡張された。一方で、超特異既約表現に関しては殆ど研究が進んでおらず、このことはより一般における p 進 Langlands 対応や法 p Langlands 対応の研究において一つの障害となっている。

一般の簡約群における分類定理の証明の鍵となったのが副 p 岩堀 Hecke 環の理論であった。この副 p 岩堀 Hecke 環の表現の研究も行われている。Vignéras による構造論は分類定理の証明でも重要な役割を果たした。また副 p 岩堀 Hecke 環自身の表現論の研究も行われており、例えば私と Ollivier, Vignéras の結果を合わせることで既約表現の分類が得られていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、 p 進簡約群の法 p 表現をさらに深く理解することである。すでに得られた分類定理に基づき、既約表現の詳細な情報を得ることを目的とする。またその成果により p 進 Langlands 対応や法 p Langlands 対応への貢献を行う。

3. 研究の方法

p 進簡約群の表現をコンパクト開部分群に制限し、その挙動を見ることでもとの表現を調べる。これは p 進簡約群の表現論においてよく使われてきた強力な手法であり、法 p 表現論においても使われてきた。コンパクト開部分群とその既約表現を固定し、固定した既約表現の成分を考えると、そこには Hecke 環と呼ばれる環が作用する。特に副 p 岩堀部分群とその自明表現を考えると、このときの Hecke 環は副 p 岩堀 Hecke 環と呼ばれ、重要な役割を果たしてきたのは上でも述べたとおりである。

本研究では、この副 p 岩堀 Hecke 環の表現論を主軸に据え p 進簡約群の表現論を研究するという手法をとった。二つの表現論の違いという観点から見ると、副 p 岩堀 Hecke 環の表現論の方が調べるのが容易である。そこで、副 p 岩堀 Hecke 環の表現論を調べ、また一方で副 p 岩堀 Hecke 環の表現論と法 p 表現論との比較を行うことで、それから法 p 表現に関する情報を得ることを試みることにした。

一方、もちろん固定したコンパクト開部分群の表現の構造をきちんと調べることも重要である。特にスペシャルなパラホリック部分群に対してその既約表現の構造を調べ、法 p 表現論へと応用することを試みた。スペシャルなパラホリック部分群の既約表現は、ある簡約群の有限体有理点からなる有限群を経由することが知られており、従って既約表現に関していえばそのような有限群の既約表現を知ることと同等である。有限体上の簡約群の有理点からなる群の既約表現は、マイルドな条件下でその簡約群の代数的な表現の制限から来ることが知られている。従って、正標数の体上で定義された簡約群の代数的な表現の理解が重要となる。そこで、この表現論を調べることで法 p 表現論への貢献を行うことを試みた。

4. 研究成果

副 p 岩堀 Hecke 環の既約表現に対しても超特異表現の概念が定義される。私はこの定義に基づき、一般の既約表現の分類を既約超特異表現の分類に帰着させるという定理を示していた。これは法 p 表現の場合に私と G. Henniart, F. Herzig, M.-F. Vignéras との共同研究で得られていた定理の類似であり、さらに二つの定理はほとんど同じ形をしている。ただし、超特異表現の分類に関しては様子が大きく異なり、簡単な形の対応を見ることはできない(そもそも既約超特異法 p 表現は現在ほとんど理解されていない)。

そこで、副 p 岩堀 Hecke 環の既約表現と既約法 p 表現のうち、超特異表現が全く関わらない部分のみ考えると、これは自然に一对一対応がつくことが上で得られていた既約表現の分類か

ら従う。私はこの対応を圏論的な主張にアップグレードした。副 p 岩堀 Hecke 環の表現圏と法 p 表現の圏のうち、超特異表現が関わらない部分圏を取り出し、副 p 岩堀 Hecke 環の表現圏から法 p 表現の圏に向けて忠実充満な関手が存在することを示した。この関手は既約表現を既約表現に移し、分類定理から従う一対一対応を復元する。なお、関手自身は「副 p 岩堀部分群による不変部分をとる」「副 p 岩堀部分群の自明表現からのコンパクト誘導表現とのテンソル積をとる」という自然な形で定義される。

スペシャルなパラホリック部分群の表現論は、上で述べたとおり正標数の体上で定義された簡約群の代数的な表現の理論に係る。そこで私はこの表現論を調べることにした。ただし、本研究計画中では代数的な表現の理論自身の研究に注力し、法 p 表現への応用については今後の課題とした。

正標数における簡約群の代数的な表現論もそれなりに長い歴史があり、特にアフィン Weyl 群と呼ばれる群の組み合わせ論が表現論を支配するということは長らく知られていた。近年の Williamson らの仕事により、これはさらにアフィン Weyl 群に付随する Hecke 圏と呼ばれる圏がより精密にコントロールしているということがわかってきた。アフィン Weyl 群に付随する Hecke 圏とは、大雑把には岩堀 Hecke 環のよい圏化を与える圏であり、私が研究を行う前からすでにいくつかの実現が知られていた。最も重要であると思われる実現が旗多様体上の極大トーラス同変パリティ層の圏による実現である。また、特殊な場合には Soergel により Soergel 両側加群と呼ばれる実現が得られていた。さらに Elias-Williamson により図形的な表示による実現も得られており、パリティ層の圏や (Soergel 両側加群が機能する場合には) Soergel 両側加群の圏と圏同値になることが知られていた。

ここで述べた中で、Soergel 両側加群は (かなりいい加減な言い方をすれば) 標数が 0 の場合しか機能しないという問題を持っていた。従って本研究の目的である法 p 表現を考える際には使うことができない。私は Soergel 両側加群の定義を修正し、この修正された圏が正標数の場合も込めてほぼすべての場合に Hecke 圏として機能することを示した。(例えば標数が 2 でなければ問題ない。) また、この圏がパリティ層の圏や Elias-Williamson の定義した圏と圏同値であることを示した。本研究の意義はいくつかある。まずは、(Soergel 両側加群が多く応用を持ったように) 応用が見込めるということである。実際、Bezrukavnikov-Riche は私の実現を用いて、簡約群の表現圏の主ブロックが Hecke 圏の作用を持つという Riche-Williamson の予想を解決した。また、私はこの予想の Frobenius 核版を定式化し証明した。こちらの証明にも私の定義した修正された Soergel 両側加群の圏が使われる。また、この定義に基づいて、Hecke 圏の特異版も定義した。これはパリティ層の場合には一般旗多様体上の Levi 部分群に関して同変なパリティ層のなす圏として定義されるもので、実際私は定義した圏がこの場合のパリティ層のなす圏とも圏同値であることを示した。この特異版は Elias-Williamson によるアプローチでは構成が困難であり、実際に (それに向かった研究はあるものの) その方法では実現されていない。

また、 p 進表現に関する研究も行った。もともと法 p 表現の研究動機は法 p Langlands 対応の確立にあるが、そもそも法 p Langlands 対応は p 進 Langlands 対応とともに考えられていた。 p 進 Langlands 対応は簡約群の p 進表現と Galois 群の p 進表現との対応を期待するものであるため、両者の理解が欠かせない。私は簡約群の p 進表現に関する共同研究をトロント大学の F. Herzig と行った。

ここで対象としたのは p 進 Banach 表現である。一般に簡約群と呼ばれるクラスの群に対して、その表現の最も重要かつ基本的な構成法の一つとして放物型誘導というものがある。そこで、放物型誘導により得られる表現である放物型誘導表現の構造を調べるのが重要となる。特にそのできあがった表現が既約であるかを判定するというのは最も基本的な問題の一つといえよう。一方で p 進 Banach 表現の場合にこの問題は殆ど調べられておらず、わずかに GL_2 の場合が調べられているのみであった。

我々は共同研究において、有限次元からの放物型誘導により得られる表現に対する既約性の判定について考察した。まず我々はこの既約性に関する判定法を得た。この判定法は二つの主張にわかれる。最初の主張は、既約性の判定に関する問題がスムーズ表現からの放物型誘導の場合に帰着されるというものである。より正確には、放物型部分群 P とその Levi 部分 M の有限次元既約表現 σ に対して、ある Levi 部分群 L とある M のスムーズ表現 τ が存在し、 σ からの放物型誘導により得られる表現が既約であることと、 τ の L への放物型誘導表現が既約であることが同値であることを示した。

このようにして問題は σ がスムーズ表現である時に帰着される。スムーズ表現はより昔から深く調べられている表現で、多くの蓄積を持つ。我々はスムーズ表現からの放物型誘導表現に対して、次を示した：スムーズ表現からの p 進 Banach 表現の意味での放物型誘導表現が既約であるのは、スムーズ表現の意味での放物型誘導表現の任意の 0 でない部分表現が p 進 Banach 表現の意味での放物型誘導表現において稠密であることと同値。また、さらにスムーズ表現の意味での放物型誘導表現の部分表現が Whittaker 模型を持てば、 p 進 Banach 表現の意味での放物型誘導表現において稠密であることも示した。従って、スムーズ表現の意味での放物型誘導表現の任意の 0 でない部分既約表現が Whittaker 模型を持てば p 進 Banach 表現の意味での放物型誘導表現は既約である。この最後の条件はスムーズ表現の言葉のみで記述されていることに

注意する．我々はこの条件をもとに多くの既約な放物型誘導表現の例を提示した．

ただし，一方でこの判定法は十分条件しか与えないことも我々の研究により明らかになった．そのような例はすでに GL_3 の場合に現れる．我々は GL_3 の場合を調べ，この場合に既約性の必要十分条件をあきらかにした．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Noriyuki Abe, Florian Herzig and Marie-France Vigneras	4. 巻 26
2. 論文標題 Inverse Satake isomorphism and change of weight	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Representation Theory	6. 最初と最後の頁 264--324
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/ert/594	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Noriyuki Abe	4. 巻 13
2. 論文標題 A comparison between pro-p-Iwahori Hecke modules and mod p representations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebra & Number Theory	6. 最初と最後の頁 1959-1981
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/ant.2019.13.1959	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Noriyuki Abe	4. 巻 749
2. 論文標題 Modulo p parabolic induction of pro-p-Iwahori Hecke algebra	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal für die reine und angewandte Mathematik	6. 最初と最後の頁 1-64
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/crelle-2016-0043	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Noriyuki Abe, Guy Henniart and Marie-France Vigneras	4. 巻 22
2. 論文標題 On pro-p-Iwahori invariants of R-representations of reductive p-adic groups	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Representation Theory	6. 最初と最後の頁 119-159
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/ert/518	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Noriyuki Abe	4. 巻 23
2. 論文標題 Involutions on pro-p-Iwahori Hecke algebras	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Representation Theory	6. 最初と最後の頁 57-87
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/ert/521	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計16件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 阿部紀行
2. 発表標題 On Soergel bimodules
3. 学会等名 2019年度RIMS共同研究(公開型) 「表現論とその周辺分野の進展」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Noriyuki Abe
2. 発表標題 A Hecke action on $G1_T$ -modules
3. 学会等名 Modular Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 阿部紀行
2. 発表標題 On Soergel bimodules
3. 学会等名 Arithmetic Geometry and Representation Theory
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Noriyuki Abe
2. 発表標題 On Soergel bimodules
3. 学会等名 Geometry and representation theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 阿部紀行
2. 発表標題 On Soergel bimodules
3. 学会等名 第15回代数・解析・幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 阿部紀行
2. 発表標題 p進代数群の法p表現とHecke環
3. 学会等名 代数学コロキウム (東京大学)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Noriyuki Abe
2. 発表標題 Mod p representations and pro-p Iwahori Hecke algebras
3. 学会等名 2018 ICM satellite conference on Automorphic Forms, Galois Representations and L-functions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Noriyuki Abe
2. 発表標題 Mod p representations and pro- p -Iwahori Hecke algebra
3. 学会等名 Number / Representation Theory seminar (トロント大学) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 阿部紀行
2. 発表標題 Mod p representations and pro- p -Iwahori Hecke algebra
3. 学会等名 九大代数学セミナー (九州大学) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 阿部紀行
2. 発表標題 On Soergel bimodules
3. 学会等名 南大阪代数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Noriyuki Abe
2. 発表標題 On Soergel bimodules
3. 学会等名 London Algebra Colloquium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Noriyuki Abe
2. 発表標題 A Hecke action on G_1T -modules
3. 学会等名 Conference on vertex algebras and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 阿部紀行
2. 発表標題 Bott-Samelson両側加群の間の準同型
3. 学会等名 2021年度表現論シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Noriyuki Abe
2. 発表標題 Soergel bimodules and homomorphism between Bott-Samelson bimodules
3. 学会等名 Representation theory and geometry of loop spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Noriyuki Abe
2. 発表標題 Irreducibility of p -adic Banach principal series representations
3. 学会等名 Seminaire Groupes Reductifs et Formes Automorphes (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Noriyuki Abe
2. 発表標題 Realizations of Hecke categories
3. 学会等名 LMS Bath symposium on Geometric and Categorical Representation theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Workshop on Shimura varieties, representation theory and related topics, 2019	開催年 2019年 ~ 2019年
---	----------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------