

令和 5 年 5 月 31 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18H01111

研究課題名(和文) 数論的 L 関数と多重ゼータ関数の解析的理論

研究課題名(英文) The analytic theory of arithmetic L-functions and multiple zeta-functions

研究代表者

松本 耕二 (Matsumoto, Kohji)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：60192754

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,200,000円

研究成果の概要(和文)：整数論において極めて重要な意義を持つ、ゼータ関数、L関数さらには多重ゼータ関数の理論について、主として解析的側面からの研究を行なった。ゼータ関数の値分布に関して、確率論や関数空間論の手法を用いて新しいタイプの極限定理や普遍性定理の導出を行ない、Goldbach 予想に付随する Dirichlet 級数との関連も調べた。また多重ゼータ関数については表現論、組み合わせ論的な立場にも立脚して、Schur 多重ゼータ関数とルート系のゼータ関数の繋がりなどを発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ゼータ関数、多重ゼータ関数の研究は今も世界中で極めて活発に行われており、特に解析学や表現論などの幅広い枠組みでの研究は新しい研究方向を切り開く可能性が高いと考えられる。純理論的な数学の研究なので、直接的な社会へのフィードバックはすぐには見出せないが、学術の活性化を通じて社会の高度化にも生かされることになるはずだと考える。

研究成果の概要(英文)：We studied mainly analytic aspects of zeta-functions, L-functions and multiple zeta-functions which are quite important in number theory. As for the value-distribution of zeta-functions, we used the techniques of probability theory and function-space theory to obtain new type of limit theorems and universality theorems, and further, considered connections with Dirichlet series attached to Goldbach's problem. On multiple zeta-functions, we also based on the aspects of representation theory and combinatorics to find connections between Schur multiple zeta-functions and zeta-functions of root systems.

研究分野：数学(整数論)

キーワード：ゼータ関数 L 関数 多重ゼータ関数 値分布 ルート系 普遍性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

ゼータ関数の解析的な理論は、近年になってアメリカ、ドイツ、フランス、そして我が国など各国の研究者によって新たな光が当てられつつある、極めてホットな研究領域である。また多重ゼータ関数の解析的な理論も近年は進展が著しいが、特に Lie 代数の表現論や組み合わせ論な視点なども取り入れられて、ルート系のゼータ関数の理論や Schur 型の多重ゼータ関数の理論も生まれ、大きく変貌しつつある。研究代表者は以前からこの研究領域に寄与してきたが、その経験と実績を生かして、さらなる発展に貢献したい。

2. 研究の目的

値分布論においては M 関数の理論というものが 2010 年前後に樹立されている。これはゼータ関数の値分布についての極限定理の分布密度関数を明示的に与えるものであり、値分布論の精密化のひとつの鍵となり得る方向性である。この M 関数の立場から、より一般のゼータ関数、L 関数の値分布論を展開するのが目的の一つである。当面は保型形式に関連するゼータ関数、L 関数の場合を見極めたい。

他方、多重ゼータ関数については、そもそも対象が多変数の複素関数であるため、多変数複素解析を立脚点とする必要があり、特異点や零点集合の挙動の解析が一変数の場合に比べて格段に困難である。しかしルート系のゼータ関数など、表現論的、代数的な構造を持ち、その立場からの構造論を展開することが可能と思われるものもある。本研究では必要に応じて表現論的、組み合わせ論的な立場との融合を図り、統一的な視野からの研究を進めて、より深い理解に到達したい。

3. 研究の方法

ゼータ関数の理論はそもそも代数学と解析学の双方にまたがる研究領域と言えるが、さらに本研究は種々の観点からの複合的考察を主軸とするので、伝統的な複素解析学のみならず、確率論、エルゴード理論、関数空間論などの解析的手法や、Lie 代数の表現論、あるいは組み合わせ論などの代数的方法も不可欠である。さらに零点の分布や特異点の振る舞いなどを追求するには相当量の数値計算をコンピュータで実行して状況を探る必要もある。これらを融合的に扱っていくことで新しい方向の研究を推進する。

4. 研究成果

まずは値分布論における成果について述べると、M 関数の理論を保型形式に付随する L 関数へと拡張できたことが重要な成果である。保型 L 関数の場合、t-aspect, レベル aspect など種々の観点と考えられるが、t-aspect については、古典的な Bohr-Jessen 流の議論に立脚する方法ではあるが、対称べき L 関数の場合も含めて、ある程度満足すべき結果にまで到達した。一方、レベルの観点からの平均値を考えることはより重要かつ困難であって、現状ではいくつかの大きな予想 (Riemann 予想の類似など) を仮定しないと意味のある結果は得られていないが、それでも保型 L 関数や対称べき L 関数の (特に対称二乗 L 関数の場合の) 値分布に関する、M 関数を被積分関数に含むような極限定理を得て、この場合の M 関数論の構造がかなり明らかになってきている。ここではもともとの Ihara-Matsumoto の方法のみならず、Granville-Soundararajan の手法などが有効に用いられる。さらに Goldbach 予想に付随する、von Mangoldt 関数を分子に載せた Dirichlet 級数の値分布に関しても、M 関数論的なアプローチが可能であることを見出し、Fujii による先行研究の着想を深化させることによって、Goldbach 問題への今までにない形の寄与を行なった。

次に多重ゼータ関数に関しては、中筋、山崎らによって Young 図形に付随する Schur 多重ゼータ関数という概念が導入され、組み合わせ論における Schur 関数の一種のゼータ的類似と看做しての研究が近年急速に進展しつつある。ここでも本研究では特にその解析的な側面に着目したが、その表現論的な特性に注目すれば、Schur 多重ゼータ関数がルート系のゼータ関数と何らかの結びつきを持つであろう、と考えるのは自然な着想である。実際にすでに得られた成果として、anti-hook タイプの Schur 多重ゼータ関数を (少し一般化された) ルート系のゼー

タ関数を用いて表示することができ、Bump らの Weyl 群多重級数との関係も見出されつつある。また Giambelli の古典的な公式の類似を得て、その応用を探る方向でも研究が進展した。

一方、基本的な Euler-Zagier タイプの多重ゼータ関数についてであるが、その零点集合の挙動は依然として全くの謎に包まれている。この方向への試みとして、数値実験なども用いて、実軸上の零点についての解析を行ない、漸近挙動や零点の分布についての成果を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計22件（うち査読付論文 22件 / うち国際共著 10件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 K. Matsumoto, T. Matsusaka and I. Tanackov	4. 巻 239
2. 論文標題 On the behavior of multiple zeta-functions with identical arguments on the real line	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Number Theory	6. 最初と最後の頁 151--182
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 R. Kacinskaite and K. Matsumoto	4. 巻 31
2. 論文標題 A survey of the theory of mixed joint universality for zeta-functions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proc. Journ. Arithm., W. de Gruyter	6. 最初と最後の頁 47--59
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Matsumoto	4. 巻 36
2. 論文標題 An M-function associated with Goldbach's problem	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Ramanujan Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 339--352
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Matsumoto, A. Nawashiro and H. Tsumura	4. 巻 44
2. 論文標題 Double Dirichlet series associated with arithmetic functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Kodai Math. J.	6. 最初と最後の頁 437--456
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Matsumoto	4. 巻 61
2. 論文標題 Asurvey on the theory of multiple Dirichlet series with arithmetical coefficients as numerators	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Lith. Math. J.	6. 最初と最後の頁 391--400
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Matsumoto and S. Saad Eddin	4. 巻 73
2. 論文標題 An asymptotic formula for the $2k$ -th power mean value of $ L'/L(1+it_0, \chi) $	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 781--814
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 R. Kacinskaite and K. Matsumoto	4. 巻 25
2. 論文標題 The discrete case of the mixed joint universality for a class of certain partial zeta-functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Taiwanese J. Math.	6. 最初と最後の頁 647--663
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 D. Essouabri and K. Matsumoto	4. 巻 32
2. 論文標題 Values of multiple zeta functions with polynomial denominators at non-positive integers	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Intern. J. Math.	6. 最初と最後の頁 1--41
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Matsumoto and M. Nakasuji	4. 巻 98
2. 論文標題 Expressions of Schur multiple zeta-functions of anti-hook type by zeta-functions of root systems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Publ. Math. Debrecen	6. 最初と最後の頁 345--377
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 D. Essouabri and K. Matsumoto	4. 巻 193
2. 論文標題 Values at non-positive integers of generalized Euler-Zagier multiple zeta-functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Acta Arith.	6. 最初と最後の頁 109-131
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura	4. 巻 72
2. 論文標題 Zeta-functions of root systems and Poincare polynomials of Weyl groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tohoku Math J.	6. 最初と最後の頁 87-126
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura	4. 巻 84
2. 論文標題 An overview and supplements to the theory of functional relations for zeta-functions of root systems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Adv. Stud. Pure Math.	6. 最初と最後の頁 263-295
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Matsumoto and M. Shoji	4. 巻 6
2. 論文標題 Numerical computations on the zeros of the Euler double zeta-functions II	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 European J. Math.	6. 最初と最後の頁 488-507
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Matsumoto, T. Onozuka and I. Wakabayashi	4. 巻 295
2. 論文標題 Laurent series expansions of multiple zeta-functions of Euler-Zagier type at integer points	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Math. Z.	6. 最初と最後の頁 623-642
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Kacinskaite and K. Matsumoto	4. 巻 25
2. 論文標題 On mixed joint discrete universality for a class of zeta-functions: a further generalization	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Math. Modell. Anal.	6. 最初と最後の頁 569-583
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Matsumoto and Y. Umegaki	4. 巻 26
2. 論文標題 On the value-distribution of symmetric power L-functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Ramanujan Math. Soc. Lecture Notes	6. 最初と最後の頁 147-167
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 G. Bhowmik, K. Halupczok, K. Matsumoto and Y. Suzuki	4. 巻 65
2. 論文標題 Goldbach representations in arithmetic progressions and zeros of Dirichlet L-functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematika	6. 最初と最後の頁 57-97
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/S0025579318000323	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Matsumoto and Y. Umegaki	4. 巻 198
2. 論文標題 On the density function for the value-distribution of automorphic L-functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Number Theory	6. 最初と最後の頁 176-199
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Kacinskaite and K. Matsumoto	4. 巻 59
2. 論文標題 On mixed joint discrete universality for a class of zeta-functions II	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Lith. Math. J.	6. 最初と最後の頁 54-66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10986-019-09432-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 D. Essouabri and K. Matsumoto	4. 巻 67
2. 論文標題 Values at non-positive integers of partially twisted multiple zeta-functions I	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Comment. Math. Univ. St. Pauli	6. 最初と最後の頁 83-100
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 松本耕二	4. 巻 29
2. 論文標題 ゼータ関数の普遍性について	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 応用数理	6. 最初と最後の頁 135-139
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Matsumoto and Y. Umegaki	4. 巻 14
2. 論文標題 On the value-distribution of the difference between logarithms of two symmetric power L-functions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 2045-2081
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S17933042118501245	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計17件 (うち招待講演 17件 / うち国際学会 12件)

1. 発表者名 K. Matsumoto
2. 発表標題 On Schur multiple zeta-functions
3. 学会等名 ELAZ 2022, Poznan, Poland (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 K. Matsumoto
2. 発表標題 The theory of multiple zeta-functions: the history and recent developments
3. 学会等名 Lithuanian Math. Society (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 K. Matsumoto
2. 発表標題 M-functions associated with cusp forms
3. 学会等名 1st Intern. Workshop on Analytic Number Theory at UNIST, Ulsan, Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 K. Matsumoto
2. 発表標題 Multiple Dirichlet series with arithmetical coefficients on the numerators
3. 学会等名 IMSc Webinar, IMS, Chennai, India (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 K. Matsumoto
2. 発表標題 An M-function associated with Goldbach's problem
3. 学会等名 Intern. Conf. on Number Theory and Discrete Math., Kochi, India (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 K. Matsumoto
2. 発表標題 On the behavior of multiple zeta-functions with identical arguments on the real line
3. 学会等名 Balu Fest, IMSc, Chennai, India (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kohji Matsumoto
2. 発表標題 Multiple Dirichlet series with arithmetical coefficients on the numerators
3. 学会等名 Mini-Symposium on Analytic Number Theory and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本耕二
2. 発表標題 多重ゼータ関数の零点集合の形状について
3. 学会等名 東工大数論・幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kohji Matsumoto
2. 発表標題 On the zero-sets of multiple zeta-functions
3. 学会等名 Fonctions Zeta (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本耕二
2. 発表標題 $\zeta^2(s)$ の近似関数等式の誤差項の平均値について
3. 学会等名 整数論・環論合同セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本耕二
2. 発表標題 多重ゼータ関数の負の整数点での値の表示について
3. 学会等名 第13回多重ゼータ研究集会 & 第48回関西多重ゼータ研究会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 K. Katsumoto
2. 発表標題 On the theory of M-functions
3. 学会等名 Profinite monodromy, Galois representations, and complex functions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Matsumoto
2. 発表標題 ゼータ関数の普遍性について
3. 学会等名 日本応用数理学会2018年度年会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Matsumoto
2. 発表標題 On density functions in the value-distribution theory of L-functions
3. 学会等名 International Conference on Number Theory dedicated to the 70th birthdays of Professors A. Laurincikas and E. Manstavicius (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Matsumoto
2. 発表標題 Asymptotic results on mean values of logarithmic derivatives of Dirichlet L-functions
3. 学会等名 Conference in Number Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Matsumoto
2. 発表標題 An overview of the theory of multiple zeta-functions
3. 学会等名 Value distribution of zeta and L-functions and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Matsumoto
2. 発表標題 Values of general multiple zeta-functions with polynomial denominators at non-positive integer points
3. 学会等名 Value distribution of zeta and L-functions and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 松本耕二	4. 発行年 2018年
2. 出版社 東北大学大学院理学研究科	5. 総ページ数 58
3. 書名 ルート系のゼータ関数の理論入門	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	見正 秀彦 (Mishou Hidehiko) (10435456)	東京電機大学・システムデザイン工学部・教授 (32657)	
研究分担者	鈴木 正俊 (Suzuki Masatoshi) (30534052)	東京工業大学・理学院・准教授 (12608)	
研究分担者	小森 靖 (Komori Yasushi) (80343200)	立教大学・理学部・教授 (32686)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関