

令和 5 年 5 月 21 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01112

研究課題名（和文）野性的モチーフ積分論の確立と特異点への応用

研究課題名（英文）Wild motivic integration and application to singularities

研究代表者

安田 健彦（Yasuda, Takehiko）

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30507166

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 13,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、野性的Deligne-Mumfordスタック、モチーフ積分、野性商特異点など、代数幾何学の特異点に関わる複数のテーマについて理論構築とその応用を行った。主要な成果には、等標数の野性的Deligne-Mumfordスタックへのモチーフ積分の一般化、野性マッケイ対応の証明、形式的トーサーのモジュライ空間の構成、2次元KLT特異点の局所エタール基本群の有限性、およびDeligne-Mumfordスタック上のBatyrev-Manin予想の定式化などが挙げられる。研究成果は複数の国際研究集会で発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題は、代数幾何学の特異点に関わる複数の重要なトピックを対象として、新たな理論構築とその応用を行った。研究成果は、代数幾何学や整数論分野内での知見の拡大につながった。特に、野性的Deligne-Mumfordスタックやモチーフ積分、野性商特異点などの理解を深めることで、それらを用いる先端的な研究の進展が期待される。研究成果はarXiv等のインターネット上で公開され、誰でも見ることができる。また、多くの国際研究集会で発表し、より多くの人に研究成果が伝わるように努めた。多くの国際共同研究を通して、日本の数学研究の水準向上や国際競争力強化に貢献できたと思う。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we have constructed and applied new theories in multiple areas of algebraic geometry involving singularities, such as wild Deligne-Mumford stacks, motivic integration, and wild quotient singularities. Key achievements include the generalization of motivic integration to wild Deligne-Mumford stacks of equal characteristic, the proof of the wild McKay correspondence, the construction of the moduli space of formal torsors, the finiteness of the local etale fundamental group of two-dimensional KLT singularities, and the formulation of the Batyrev-Manin conjecture for Deligne-Mumford stacks. These research results were presented at several international conferences.

研究分野：代数幾何

キーワード：Deligne-Mumfordスタック 野性商特異点 モジュライ空間 モチーフ積分 局所エタール基本群

1. 研究開始当初の背景

2000年代に標数零における極小モデル理論において大きな進展があった後、多くの専門家の興味、正標数や混合標数など、より数論的な状況の幾何へ向かっていた。そのため、数論的設定における特異点の理解、そして、特異点と数論的現象との関連の理解を深化させる必要性が高まっていた。

数論的状況での代表的な「悪い」特異点に野性的商特異点がある。研究代表者のそれまでの研究 (Fabio Tonini, Melanie Matchett Wood との共同研究を含む) で、モチーフ積分や p 進積分を使い野性的商特異点に関する結果 (野性 McKay 対応) を得ていた。しかし、完全に一般的な形に、理論をまとめることは出来ていなかった。

また、有理点の分布に関する Batyrev-Manin 予想と、代数体の Galois 拡大の分布に関する Malle 予想の間の関連について、研究代表者は McKay 対応を通じた考察により観察していた。

2. 研究の目的

本研究課題の主要な目的の一つは、野性的 Deligne-Mumford スタック上のモチーフ積分の理論を確立である。この理論の応用として、一般的な状況 (考える有限群への制限や作用の線形性の条件を課さない) における野性 McKay 対応が従うことになる。

この理論構築において得られるであろう野性分岐に関する知見を、代数体上の数論統計的問題 (上述の Batyrev-Manin 予想や Malle 予想など) に応用することも目的の一つである。

3. 研究の方法

研究期間の前半は、野性的 Deligne-Mumford スタック上のモチーフ積分理論構築に向け、基礎理論構築を行う一方で、具体例の計算の研究も推し進めた。後半は、そこで得られた知見を、局所エタール基本群の有限性の問題に応用したり、Deligne-Mumford スタックに対する Batyrev-Manin 予想の定式化の研究に応用した。

当研究課題の多くの部分は、研究代表者が国内外の研究者と共同で行った。一部の研究は、代表者や研究協力者が単独で行った。

4. 研究成果

Fabio Tonini との共同研究において、一般の有限群に対し、形式トーサーのモジュライ空間を P スキームというスキームの変種として構成することに成功した。これにより、モチーフ的不変量による野性 McKay 対応の予想が、一般の有限群に対しても厳密に意味を成すことになった。 P スキームの理論を構築するために、sur 位相、luin 位相という二つの新しい Grothendieck 位相を導入した。

野性的 Deligne-Mumford スタック上のモチーフ積分理論を構築した。応用として、正標数における野性 McKay 対応予想を一般の有限群に対し証明することができた。これの特別な場合として、非アルキメデス局所体の拡大の数え上げに関する Serre-Bhargava の公式のモチーフ版を得た。

丹野真人との研究では、野性 McKay 対応の応用として、標数 p における、位数が p 巾の巡回群による商特異点の研究をした。野性 McKay 対応で重要な役割を果たす v 関数の公式を導くことに成功した。この公式を用いて、位数が p の二乗の場合に、商特異点に対数端末的であるための条件を導いた。その後、丹野氏は単著論文において、この結果をさらに一般の p 巾位数の場合に拡張した。

山本貴大は、野性 McKay 対応における複数の病的な現象を明らかにした。山本は以前の研究で、クレパント特異点解消の Euler 標数と有限群の共役類の個数の一致を主張する Batyrev の定理が、野性的状況では成立しないことを例の構成により示していた。今回の研究で、そのような例を無限個構成することに成功した。また、 v 関数が分岐ジャンプからは決まらないという新しい現象を観察することに成功した。

Javier Carvajal-Rojas 氏と共同で、2次元 KLT 特異点のエタール局所基本群の有限性を示した。

野性 McKay 対応や、野性的 Deligne-Mumford スタック上のモチーフ積分の考え方が重要な役割を果たした。証明では弦モチーフの降鎖律を示すことが鍵となった。従来の類似の研究では、主に順 (tame) なケースに限られていたのが、新しいアプローチにより野性的ケースを扱えるようになった。

Ratko Darda 氏との共同研究では、有理点の分布に関する Batyrev-Manin 予想を Deligne-Mumford スタックへと一般化した。また、この一般化された予想の特別な場合として可換有限群スキームに対する BG スタックの場合を検証した。また、そこで得られた結果を逆 Galois 問題に応用した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yamamoto Takahiro	4. 巻 70
2. 論文標題 Pathological Quotient Singularities in Characteristic Three Which Are Not Log Canonical	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 793-806
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1307/mmj/1600308172	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tonini Fabio, Yasuda Takehiko	4. 巻 73
2. 論文標題 Moduli of formal torsors II	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Fourier	6. 最初と最後の頁 511-558
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/aif.3533	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Tanno Mahito, Yasuda Takehiko	4. 巻 65
2. 論文標題 The wild McKay correspondence for cyclic groups of prime power order	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Illinois Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 619-654
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/00192082-9402078	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yasuda Takehiko	4. 巻 88
2. 論文標題 Open problems in the wild McKay correspondence and related fields	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Adv. Stud. Pure Math.	6. 最初と最後の頁 279-303
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/aspm/08810279	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計27件(うち招待講演 27件/うち国際学会 19件)

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Another height function for Deligne-Mumford stacks via twisted sectors
3. 学会等名 Geometry of Arithmetic Statistics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Orbifold pseudo-effective cones
3. 学会等名 Rationality, Moduli Spaces, and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Batyrev-Manin conjecture for Deligne-Mumford stacks
3. 学会等名 PRIMA Congress 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Stringy invariants and finiteness of local fundamental groups
3. 学会等名 Non-Archimedean methods in arithmetic and geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 On the isomorphism problem of projective schemes
3. 学会等名 Algebraic Geometry in East Asia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 TakehikoYasuda
2. 発表標題 Local fundamental groups of log terminal singularities via stringy motives
3. 学会等名 Recent Developments in Algebraic Geometry, Arithmetic and Dynamics Part 1 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 The isomorphism problem for projective schemes
3. 学会等名 MSJ-KMS Joint Meeting 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Introduction to algebraic stacks (with emphasis on application to singularities)
3. 学会等名 Interactions of New Trends in Algebraic Geometry and Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Local etale fundamental groups of log terminal surface singularities
3. 学会等名 Algebraic Number Theory and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Quotient singularities via stringy motives
3. 学会等名 2020 OIST Workshop "Quantum Math, Singularities and Applications" (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 安田健彦
2. 発表標題 モチーフ積分とMcKay対応
3. 学会等名 東京工業大学談話会(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 安田健彦
2. 発表標題 位数 p^2 の巡回群による商特異点
3. 学会等名 特異点セミナー(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 The motivic McKay correspondence in arbitrary characteristics
3. 学会等名 The McKay correspondence, mutation and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Motivic integration over DM stacks and its applications
3. 学会等名 Arithmetic Geometry seminar at the University of Munster (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Motivic integration over DM stacks and its applications
3. 学会等名 Online Algebraic Geometry Seminar, Osaka University (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 The wild McKay correspondence of arbitrary finite groups
3. 学会等名 月曜特異点セミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 野性McKay対応概説 - 数論的視点と最新成果 -
3. 学会等名 第27回整数論サマースクール (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 The wild McKay correspondence for an arbitrary finite group
3. 学会等名 Interaction Between Algebraic Geometry and QFT (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 The wild McKay correspondence for an arbitrary finite group
3. 学会等名 RIMS & OIST Workshop: On the Problem of Resolution of Singularities and its Vicinity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Motivic integration and the wild McKay correspondence
3. 学会等名 a lecture series at EPFL (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 モチーフ積分とマッケイ対応
3. 学会等名 第24回代数数学若手研究会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Computational aspects of the McKay correspondence
3. 学会等名 Higher Dimensional Arithmetic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 A moduli problem in the wild McKay correspondence
3. 学会等名 Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 特異点と有理点
3. 学会等名 熊本大学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Motivic mass formulae for formal torsors
3. 学会等名 Arithmetic Geometry : l-adic and p-adic aspects (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Cohen-Macaulayness of klt singularities in positive characteristics
3. 学会等名 代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takehiko Yasuda
2. 発表標題 Quotient singularities by the cyclic group of order p
3. 学会等名 Modern Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	山本 貴大 (Yamamoto Takahiko)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	丹野 真人 (Tanno Mahito)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 高次元代数多様体の有理点	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Singularities and Arithmetics	開催年 2020年～2020年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ベルギー	KU Leuven			
カナダ	Carleton University			