

令和 5 年 6 月 14 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2018～2021

課題番号：18H01119

研究課題名（和文）低次元トポロジーにおける代数的・圏論的構造

研究課題名（英文）Algebraic and category-theoretic structures in low-dimensional topology

研究代表者

葉廣 和夫（Habiro, Kazuo）

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：80346064

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,850,000円

研究成果の概要（和文）：研究期間内に、低次元トポロジーと群コホモロジーについてのいくつかのトピックスについて研究を行った。Anderson Vera氏と共同で、曲面の写像類群の2重フィルトレーションと付随するJohnson準同型について研究した。小鳥居祐香氏と共同でリボンYetter-Drinfeld加群とタングルの量子不変量について研究した。片田舞氏と共同で自由群のIA自己同型群や曲面の写像類群のトレリ部分群の安定域における有理係数コホモロジーについて研究した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

写像類群の2重フィルトレーションは、写像類群の構造を調べるための新しい構造を与えている。ribbon Yetter-Drinfeld加群の概念は、Yetter-Drinfeld加群からタングルや結び目の新しい不変量を構成する方法を与えている。自由群のIA自己同型群の安定有理コホモロジーについて我々が与えた予想は、この重要な群のコホモロジー構造についての見通しを与えていると考える。この予想を証明することが、この群のコホモロジーの研究における一つの重要なステップとなるだろうと考える。

研究成果の概要（英文）：Within the research period, I studied several topics in the field of low-dimensional topology and group cohomology. With Anderson Vera, I studied double filtrations of the mapping class groups of surfaces and the Johnson homomorphisms. With Yuka Kotorii, I studied ribbon Yetter-Drinfeld modules and quantum invariants of tangles. With Mai Katada, I studied the stable rational cohomology of the IA-automorphism groups of free groups and the Torelli subgroups of the mapping class groups of surfaces.

研究分野：位相幾何学

キーワード：写像類群 Johnson準同型 Yetter-Drinfeld加群 タングル 自由群のIA自己同型群 群コホモロジー

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

1980年代の Jones による結び目の多項式不変量の発見や Witten によるその数理解物理的な解釈は、3次元多様体や結び目の研究は大きな影響を与え、タングルの圏、コボルディズムの圏、位相的場の理論などの代数的・圏論的な枠組みが大きく発展した。このような研究の分野は量子トポロジーとも呼ばれており、そこでは量子群などの Hopf 代数構造が非常に重要な役割を果たしている。

また、3次元多様体のトポロジーは Heegaard 分解を通して、曲面の写像類群と密接に関連している。写像類群の重要な部分群として Torelli 部分群があり、また、それらの類似として、自由群の自己同型群やその IA 自己同型部分群が研究されている。Johnson フィルトレーションと Johnson 準同型は、Torelli 群の構造を調べるための重要な道具である。また、写像類群や自由群の自己同型群の安定域における有理ホモロジー・コホモロジーに対しては、Madsen-Weiss, Galatius による計算がなされているが、Torelli 群や IA 自己同型群に対しては低次元の計算を除いてほとんどわかっていなかった。

### 2. 研究の目的

(1) Hopf 代数から絡み目の不変量を構成する方法として、ribbon Hopf 代数を用いる Reshetikhin と Turaev によるものがある。この構成では、ribbon Hopf 代数  $H$  に対して、有向タングルの圏という ribbon 圏から、 $H$  上の有限次元表現の圏という ribbon 圏への、ribbon 圏の構造を保った関手がいられる。一般の Hopf 代数  $H$  に対して同じ構成を直接行っても、 $H$  上の加群の圏にブレイド自然同型を作れないので、うまくいかない。一方、一般の Hopf 代数に対して、Yetter-Drinfeld 加群の圏が braided 圏を作ることはよく知られている。Braided 圏は ribbon 圏にかなり近いものであるので、良い性質をもつ Yetter-Drinfeld 加群を考えることにより、ribbon 圏を構成できると期待するのは自然である。

(2) 写像類群の Johnson フィルトレーションと Johnson 準同型の理論を 2 重フィルトレーションとそれに付随する準同型に拡張することを考えたい。ここでの 2 重フィルトレーションは、曲面を 3 次元球面の自明な Heegaard 分解に現れる曲面と考え、曲面の 2 つのハンドル体への包含写像が誘導する基本群の準同型による核との関係の仕方を考慮したものである。

(3) Torelli 群や IA 自己同型群の安定有理コホモロジーを考えたい。ここで「安定」とは、コホモロジーの次元に比べて、Torelli 群の乗る曲面の種数や IA 自己同型群が作用する自由群の階数が十分に大きいことを意味する。

### 3. 研究の方法

研究の目的(1), (2), (3)をそれぞれ、小島居佑香氏(広島大学)、Anderson Vera 氏(学振外国人特別研究員(当時))、片田舞氏(京都大学大学院理学研究科博士課程学生(当時))との共同で研究した。いずれも純粋数学の研究であるので、特別な実験器具は必要とせず、またコンピュータによる計算も利用しなかった。

数学的な内容における「方法」を「目的」や「成果」と区別して論ずるのは効率的でないので、ここではこれ以上説明しない。

### 4. 研究成果

(1) Ribbon Yetter-Drinfeld modules and tangle invariants(小島居佑香氏(広島大学)との共同研究)この論文では monoidal 圏の中の pivotal 対象、ribbon 対象の概念を定義した。この構成は、必ずしも双対を持たない monoidal 圏から、pivotal あるいは ribbon であるような monoidal 圏を与える。この構成を Hopf 代数上の Yetter-Drinfeld 加群の braided 圏に適用することにより、Hopf 代数上の ribbon Yetter-Drinfeld 加群の概念を得た。これによりタングルの不変量を構成することができる。

(2) Double Johnson filtrations for mapping class groups (Anderson Vera 氏との共同研究)この論文ではまず、群の拡張  $N$  列の概念を大幅に一般化して、「良い」順序可換モノイドで添え字づけられたフィルトレーションに拡張し、Johnson 準同型の理論を一般化した。次に、特に  $N^2$  が 2 個の自然数の組の全体  $N^2$  の場合を考察した。 $N^2$  で添え字づけられた群のフィルトレーションは 2 重フィルトレーションと呼ぶことができる。この 2 重フィルトレーションの一般論を曲面の写像類群に適用した。まず、 $K$  が種数  $g$  の境界付き曲面の基本群であり、この曲面の写像類群  $M$  を考える。3次元球面の種数  $g$  の標準的な Heegaard 分解に付随して、基本群  $K$  の 2 つの正規部分群  $X, Y$  を取ることができる。 $K$  には、これらの正規部分群をそれぞれ  $(1, 0), (0, 1)$  の位置に持つような自然な 2 重フィルトレーション  $K_{**}$  が入る。写像類群  $M$  の元は 2 重フィル

トレーション  $K_{**}$ を保つとは限らないが、いわゆる Goeritz 部分群(ハンドル分解の写像類群)  $G$  が  $K_{**}$ を保つ部分となる。2重フィルトレーションの一般論より、Goeritz 群  $G$  に 2重フィルトレーション  $G_{**}$ が誘導されて、Johnson 準同型も定義される。Goeritz 群の 2重フィルトレーションは、写像類群  $M$  の 2重フィルトレーション  $M_{**}$ に拡張することができるが、この場合の添え字は  $-1$  以上の整数の組  $(i, j)$  によるものである。これを写像類群  $M$  の 2重 Johnson フィルトレーションと呼ぶ。

(3) On the stable cohomology of the (IA-)automorphism groups of free groups(片田舞氏との共同研究)この論文では、群  $GL(n, \mathbb{Z})$ の代数的表現を係数とするコホモロジーに関する Borel の定理と Hochschild-Serre スペクトル系列を組み合わせるにより、ランク  $n$  の自由群  $F_n$  の IA 自己同型群  $IA_n$  の安定域における有理コホモロジーについて考察した。特にこの安定コホモロジーの代数的な構造についての予想を提出し、Church-Farb による表現安定性予想や片田氏の Albanese コホモロジーについての予想など、他の既知の予想との関連について考察した。

(4) On Borel's stable range of the twisted cohomology of  $GL(n, \mathbb{Z})$  (片田舞氏との共同研究) 上記(3)の論文に関連して、Borel の定理が成り立つための条件の改良について考察した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kazuo Habiro and Gwenael Massuyeau	4. 巻 -
2. 論文標題 The Kontsevich integral for bottom tangles in handlebodies	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kazuo Habiro, Gwenael Massuyeau	4. 巻 510
2. 論文標題 Generalized Johnson homomorphisms for extended N-series	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 205-258
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2018.05.031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kazuo Habiro and Anderson Vera	4. 巻 -
2. 論文標題 Double Johnson filtrations for mapping class groups	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuo Habiro and Yuka Kotorii	4. 巻 -
2. 論文標題 Ribbon Yetter-Drinfeld modules and tangle invariants	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Kazuo Habiro
2. 発表標題 Cyclic nerves of stratified categories
3. 学会等名 Johnson homomorphisms and related topics 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuo Habiro
2. 発表標題 Hochschild-Mitchell homology of stratified linear categories
3. 学会等名 Topology Festival, Cornell University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Unified quantum invariants of 3-manifolds
2. 発表標題 CQ3MI Summer School and Workshop
3. 学会等名 University of Southern California (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 The 15th East Asian Conference on Geometric Topology	開催年 2020年 ~ 2020年
--	----------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------