

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 5 月 31 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01120

研究課題名(和文) Kobayashi-Hitchin correspondence and Donaldson-Tian-Yau conjecture on generalized complex geometry

研究課題名(英文) Kobayashi-Hitchin correspondence and Donaldson-Tian-Yau conjecture on generalized complex geometry

研究代表者

後藤 竜司 (Goto, Ryushi)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30252571

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,200,000円

研究成果の概要(和文)：一般化された複素幾何、一般化されたケーラー幾何はノンケーラー幾何(双エルミート幾何)、非可換代数幾何、幾何学的偏微分方程式、実4次元の微分トポロジーなど、様々な分野と深く関連しており、この研究分野の最近の大きな進展が注目されている。主な研究成果は次の3つである。(1)一般化されたケーラー多様体上の一般化された正則ベクトル束にたいしてKobayashi-Hitchin 対応を確立した。(2)一般化されたケーラー幾何での松島・リヒネロビッツの定理を確立した。(3) 奇数次元のセミ・シンプレリ一群上に一般化された佐々木構造を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一般化された複素構造および一般化されたケーラー構造は通常の複素構造、シンプレクティック構造を特別な場合として含む多様体の幾何構造である。ポアソン幾何、ノンケーラー幾何(双エルミート幾何)、非可換代数幾何、幾何学的偏微分方程式、実4次元の微分トポロジーなど、様々な分野と深く関連しており、この研究分野の最近の大きな進展が注目されている。本研究の中心的なテーマは一般化されたケーラー多様体について、研究代表者が考案したモーメント写像を用い定義したスカラー曲率に用いて安定性との同値性を調べ研究するものである。その意味で、研究目的は明確であり、独創性は際立っている。

研究成果の概要(英文)：Generalized complex geometry and generalized Kahler geometry are deeply related to various fields such as non-Kahler geometry (bi-Hermitian geometry), non-commutative algebraic geometry, geometric partial differential equations, real 4-dimensional differential topology, etc. Recent developments in this research area have received widespread attention. The main research results are the following three.

(1) We establish the Kobayashi-Hitchin correspondence for generalized holomorphic vector bundles on generalized Kahler manifolds. (2) We established the Matsushima-Lichnerovitz theorem in generalized Kahler geometry. (3) We constructed a generalized Sasaki structure over odd-dimensional semi-simplery groups.

研究分野：微分幾何学、複素幾何学

キーワード：一般化された複素構造 一般化されたケーラー構造 一般化された接触構造 ポアソン構造 小林ーヒッチン対応 スカラー曲率 モーメント写像 多重安定性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ケーラー幾何学には、その背後にシンプレクティック幾何の枠組みがあることはよく知られている。Fujiki, Donaldson はケーラー多様体のスカラー曲率がモーメント写像に一致することを示した [Fu], [Do]. また、ケーラー多様体上のベクトル束のアインシュタイン・エルミート接続の平均曲率はモーメント写像と見なすことができることも知られている。コンパクト・リーマン面上の安定ベクトル束のモジュライ空間をケーラー商として構成する Atiy-Bott の先駆的な結果があり、その高次元化として、S. Kobayashi はケーラー多様体上のアインシュタイン・エルミート接続のモジュライ空間をケーラー商として構成している。

複素構造の拡張として一般化された複素構造 (generalized complex structure) が Hitchin により導入された [Hi1], [Gu2]. この幾何学では多様体 M の接束 TM と余接束 T^*M の直和 $TM \oplus T^*M$ 上で幾何学を展開する。その際、 $TM \oplus T^*M$ 上の自然な対称二次形式 $\langle, \rangle_{T \oplus T^*}$ からクリフォード代数が構成され、多様体上の微分形式全体の空間がクリフォード代数のスピン表現空間となる。この幾何学には スピン群 Spin の作用があり、 b -場の作用など、通常の幾何学にはない対称性が内在している。一般化された概複素構造とは対称二次形式 $\langle, \rangle_{T \oplus T^*}$ を保ち、次をみたす束写像 $\mathcal{J} : TM \oplus T^*M \rightarrow TM \oplus T^*M$ である、

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{J} = -\text{id}_{T \oplus T^*}$$

一般化された概複素構造 \mathcal{J} は通常の概複素構造のように固有空間分解 $(TM \oplus T^*M)^{\mathbb{C}} = \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \oplus \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{J}}$ を与える。固有空間 $\mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ がクーラント括弧に関して閉じているとき、 \mathcal{J} を一般化された複素構造という。

例 1. 通常の複素多様体 M の複素構造を J とし、 J^* を T^*M に入る複素構造とすると次の行列により、一般化された複素構造 \mathcal{J}_J が定まる:

$$\mathcal{J}_J = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^* \end{pmatrix}$$

例 2. シンプレクティック多様体 M 上のシンプレクティック構造 ω は同形 $\hat{\omega} : TM \rightarrow T^*M$ を定める。この逆写像を $\hat{\omega}^{-1} : T^*M \rightarrow TM$ とすると、次の行列により、一般化された複素構造 \mathcal{J}_{ω} が定まる。

$$\mathcal{J}_{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\omega}^{-1} \\ \hat{\omega} & 0 \end{pmatrix}$$

更に、一般化された複素構造のペア $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ で $\hat{G} := \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2 \mathcal{J}_1$ を満たし、さらに $G(\cdot, \cdot) := \langle \hat{G}, \cdot \rangle_{T \oplus T^*}$ が正値対称形式となるとき、ペア $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ を一般化されたケーラー構造という。

例 3. 上記例 1,2 により作られるペア $(\mathcal{J}_J, \mathcal{J}_{\omega})$ は一般化されたケーラー構造である。

ケーラー幾何学の拡張として、近年導入された一般化されたケーラー幾何学はポアソン構造、双エルミート幾何学、非可換代数幾何などと関連しながら研究が進展している。特に、ケーラー多様体からのポアソン変形として非自明な一般化されたケーラー多様体が豊富に現れるが、その際、楕円曲線が基本的な役割を演じる [Go11], [Go10], [Go9], [Go6].

一般化されたケーラー幾何学においては、レビ・チビタ接続に該当するものが存在しない。さらに曲率の適切な定義すら無いという状況であったが、申請者は通常のケーラー幾何との類似を追求しながら、一般化されたケーラー幾何学において、モーメント写像の枠組みを構成することに成功し、一般化されたケーラー

多様体のスカラー曲率をモーメント写像として定義した [Go2]. また, ベクトル束上の一般化された接続に関しても, シンプレクティック幾何の枠組みを構成し, モーメント写像として曲率が得られることを示した [Go3]. 通常のケーラー幾何学において, 安定なベクトル束と Einstein-Hermitian connections の存在との同値性 (Kobayashi-Hitchin 対応) は良く知られている. 申請者は小林-ヒッチン対応を一般化されたケーラー多様体上の一般化された正則ベクトル束に拡張することに成功した.

2. 研究の目的

本研究の目的は次に二つである: (1) 一般化されたケーラー多様体上において小林・ヒッチン対応を示すこと. (2) 一般化されたケーラー多様体上において Yau-Tian-Donaldson 予想を確立すること

一般化されたケーラー多様体上のベクトル束 E において, 一般化された接続 \mathbb{D} を次のような微分作用素として定義する:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^A &: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes (TM \oplus T^*M)) \\ \mathbb{D}^A(fs) &= s \otimes df + f\mathbb{D}^A s, \quad s \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M), \end{aligned}$$

ここで, 通常の接続では, T^*M のところを直和 $TM \oplus T^*M$ に置き換えており, 一般化された接続 \mathbb{D}^A は通常の曲率 D^A と $\text{End}(E) \otimes TM$ のセクション V に分解される: $\mathbb{D}^A = D^A + V$. このような微分作用素にたいしては共変微分の合成 $\mathbb{D}^A \circ \mathbb{D}^A$ として曲率を構成しようとする, 微分作用素となり, テンソルにならない. これは, ベクトル場と外微分作用素 d との反交換子がリー微分となるからである. しかし, 多様体上に d -closed な非退化スピノル ψ がある場合は, この非退化スピノルを使い, 一般化された接続に関してモーメント写像の観点から新たに「曲率」に相当する概念を導入することができる. すると, モーメント写像の枠組みが自然に適用され, 一般化された接続に対してアインシュタイン・エルミート条件が得られ, そのモジュライ空間はモーメント写像による有限次元のケーラー商として得られる. さて, ケーラー多様体上の正則ベクトル束に関して, 「正則ベクトル束が多重安定であること」と「アインシュタイン・エルミート計量が存在すること」が同値であることが知られている. これを小林・ヒッチン対応という. これを踏まえて, 次のような問い, 問題を発することは自然である.

一般化されたケーラー多様体上の一般化された正則ベクトル束に対して, 小林・ヒッチン対応とは何か?
一般化されたケーラー多様体に関して, 小林・ヒッチン対応を拡張し, 証明せよ

本研究により, シンプレクティック型と呼ばれる一般化されたケーラー多様体上のベクトル束に関しては, 上記, 問題は完全に解決され, 目的 (1) は達成された.

3. 研究の方法

一般化されたケーラー多様体 $(\mathcal{J}, \mathcal{J}_\omega)$ に対しては, 標準束に入る canonical な一般化された接続の曲率としてスカラー曲率 GR が構成され, リッチ曲率 GRic も構成される. GR は一般化されたケーラー幾何学においてシンプレクティック幾何の枠組みを適切に定めるとモーメント写像となることが示される. ケーラー多様体上の通常のケーラー・リッチ・ソリトンは直線束上のアインシュタイン・エルミート条件をみたく非自明な一般化された接続の具体例となっている. Co-Higgs 束, ポアソン・モジュールなど, 一般化された正則ベクトル束の豊富な例が存在する. また, 次元が 2 以上の正則なトラス作用をもつケーラー・アインシュタイン多様体には非自明なポアソン構造があり, ポアソン変形により, 一般化されたケーラー・アインシュタイン構造が構成されることが申請者により既に示されている. 目的 (2) については, まだ完成には至っていない. しかし

目的の達成に向けて確かな手応えは得られた。ケーラー多様体上の正則ポアソン構造は通常のケーラー構造から非自明な一般化されたケーラー構造への変形を与えることが申請者により示されている。この興味深い一般化されたケーラー構造はシンプレクティック型といわれている。論文において申請者シンプレクティック型一般化されたケーラー構造の自己同型群を調べ、もしスカラー曲率一定となるならば、その自己同型群のリー環は簡約 (reductive) となることを示した [Go1]。これは通常のケーラー幾何学における松島・リヒネロビッツの定理の拡張となっている。

4. 研究成果

(1) 小林・ヒッチン対応に関しては、研究成果として以下の2論文が出版された：R. Goto, Moduli spaces of Einstein-Hermitian generalized connections over generalized Kähler manifolds of symplectic type. Riv. Math. Univ. Parma (N.S.) 13 (2022), no. 2, 611-649.

R. Goto, The Kobayashi-Hitchin Correspondence of Generalized Holomorphic Vector Bundles Over Generalized Kähler Manifolds of Symplectic Type, International Mathematics Research Notices, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnad038> Published: 16 March 2023.

(2) 一般化されたケーラー多様体における松島・リヒネロビッツの定理に関しては以下の論文が研究成果である：R. Goto, Matsushima-Lichnerowicz type theorems of Lie algebra of automorphisms of generalized Kähler manifolds of symplectic type. Math. Ann. 384 (2022), no. 1-2, 805-855.

参考文献

- [Go1] R. Goto, Matsushima-Lichnerowicz type theorems of Lie algebra of automorphisms of generalized Kähler manifolds of symplectic type, Math. Ann. 384 (2022), no. 1-2, 805-855.
- [Go2] R. Goto, Moduli spaces of Einstein-Hermitian generalized connections over generalized Kähler manifolds of symplectic type, accepted, Rivista di Matematica della Università di Parma: Proceedings of the meeting "Cohomology of Complex Manifolds and Special Structures, II" - Levico Terme (Trento), July 5-9, 2021., arXiv:1707.03143.
- [Go3] R. Goto, Scalar curvature as moment map in generalized Kähler geometry, J. Symplectic Geom. 18 (2020), no. 1, 147-190, arXiv:1612.08190.
- [Go4] R. Goto, Unobstructed deformations of generalized complex structures induced by C^∞ logarithmic symplectic structures and logarithmic Poisson structures, Geometry and topology of manifolds, 159-183, Springer Proc. Math. Stat., 154, Springer, [Tokyo], 2016.
- [Go5] R. Goto, K. Hayano, C^∞ logarithmic transformations and generalized complex structures. J. Symplectic Geom. 14 (2016), no. 2, 341-357.
- [Go6] R. Goto, On the stability of locally conformal Kähler structures. J. Math. Soc. Japan 66 (2014), no. 4, 1375-1401.
- [Go7] R. Goto, On deformations of generalized Calabi-Yau and generalized $SU(n)$ -structures. Osaka J. Math. 49 (2012), no. 3, 795-832.
- [Go8] R. Goto, Calabi-Yau structures and Einstein-Sasakian structures on crepant resolutions of isolated singularities. J. Math. Soc. Japan 64 (2012), no. 3, 1005-1052
- [Go9] R. Goto, Unobstructed K-deformations of generalized complex structures and bi-Hermitian struc-

- tures. Adv. Math. 231 (2012), no. 2, 1041-1067.
- [Go10] R. Goto, Deformations of generalized complex and generalized Kähler structures. J. Differential Geom. 84 (2010), no. 3, 525-560.
- [Go11] R. Goto, Poisson structures and generalized Kähler structures, J. Math. Soc. Japan, 61 (2009) no. 1, 107-132, arXiv:0712.2685.
- [Go12] R. Goto, Moduli spaces of topological calibrations, Calabi-Yau, hyper-Kähler, G_2 and Spin(7) structures. Internat. J. Math. 15 (2004), no. 3, 211-257
- [Ma1] T. Mabuchi, The Yau-Tian-Donaldson conjecture for general polarizations, I. Geometry and topology of manifolds, 235-245, Springer Proc. Math. Stat., 154, Springer, [Tokyo], 2016.
- [Ma5] T. Mabuchi, An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds. I. Invent. Math. 159 (2005), no. 2, 225-243.
- [O1] S. Okawa, On images of Mori dream spaces. Math. Ann. 364 (2016), no. 3-4, 1315-1342.
- [O2] S. Okawa, H. Uehara, Exceptional sheaves on the Hirzebruch surface F_2 . Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 23, 12781-12803.
- [O3] S. Okawa, Mori dream spaces of Calabi-Yau type and log canonicity of Cox rings. J. Reine Angew. Math. 701 (2015), 195-203.
- [M1] M. Ishida, The normalized Ricci flow on four-manifolds and exotic smooth structures. Asian J. Math. 20 (2016), no. 5, 903-917.
- [K1] H. Ishida, H. Kasuya, Non-invariant deformations of left-invariant complex structures on compact Lie groups. Forum Math. 34 (2022), no. 4, 907-918.

参考文献

- [Do] S. K. Donaldson, *Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology*, Fields Medallists' lectures, 384-403, World Sci. Ser. 20th Century Math., 5, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.
- [FerSt] G. Fernandez, Mario, J. Streets, Generalized Ricci flow. University Lecture Series, 76. American Mathematical Society, Providence, RI, [2021], 2021. vi+248 pp. ISBN: 978-1-4704-6258-1.
- [Fu] A. Fujiki, *Moduli space of polarized algebraic manifolds and Kähler metrics* [translation of Sugaku 42 (1990), no. 3, 231-243; MR1073369]. Sugaku Expositions. Sugaku Expositions 5 (1992), no. 2, 173-191.
- [Gu2] M. Gualtieri, *Generalized complex geometry*, Ann. of Math. (2) 174 (2011), no. 1, 75-123.
- [Hi1] N. J. Hitchin, *Generalized Calabi-Yau manifolds*, Q. J. Math. 54 (2003), no. 3, 281-308.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 R. Goto	4. 巻 .
2. 論文標題 The Kobayashi-Hitchin correspondence of generalized holomorphic vector bundles over generalized Kahler manifolds of symplectic type	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices, IMRN	6. 最初と最後の頁 .
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnad038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 R. Goto	4. 巻 13
2. 論文標題 Moduli spaces of Einstein-Hermitian generalized connections over generalized Kahler manifolds of symplectic type	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Rivista di Matematica della Universia di Parma	6. 最初と最後の頁 611-649
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 R.goto	4. 巻 384
2. 論文標題 Matsushima-Lichnerowicz type theorems of Lie algebra of automorphisms of generalized Kahler manifolds of symplectic type	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 805-855
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-021-02299-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ryushi Goto	4. 巻 18
2. 論文標題 Scalar curvature as moment map in generalized Kahler geometry.	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Symplectic Geom.	6. 最初と最後の頁 147-190
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/JSG.2020.v18.n1.a4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 10件 / うち国際学会 9件）

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Generalized Kahler structures and generalized Sasakian structures
3. 学会等名 Supergravity, Generalized Geometry and Ricci Flow, Simons Center, Stony Brook University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Generalized contact structures and generalized Sasakian structures
3. 学会等名 Correspondences of various geometries September 30 - October 2, 2022 Nara Women's University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Scalar curvature as moment map in generalized Kahler geometry
3. 学会等名 Cohomology of Complex Manifolds and Special Structures, II Levico (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Matsushima-Lichnerowicz type theorems of Lie algebra of automorphisms of generalized Kahler manifolds of symplectic type
3. 学会等名 PRCSG Pacific Rim Complex and Symplectic Geometry Conference(7/12) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Matsushima-Lichnerowicz type theorems of Lie algebra of automorphisms of generalized Kahler manifolds of symplectic type
3. 学会等名 Workshop on Special Geometries on Riemannian Manifolds, Montreal (10/13) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 The Kobayashi-Hitchin correspondence of generalized holomorphic vector bundles over generalized Kahler manifolds of symplectic type
3. 学会等名 Generalized connections and curvature., One day workshop (11/15) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ryushi Goto
2. 発表標題 一般化されたケーラー幾何学
3. 学会等名 2020 日本数学会 秋季学会 企画特別講演(招待講演) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Scalar curvature is moment map in generalized Kahler geometry.
3. 学会等名 Cohomology of Complex Manifolds and Special Structures Levico Terme (Trento), (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Einstein-Hermitian vector bundles over generalized Kahler manifolds
3. 学会等名 The 24th Symposium on Complex Geometry , Kanazawa (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 R. Goto
2. 発表標題 Einstein-Hermitian vector bundles over generalized Kahler manifolds
3. 学会等名 第4回日中幾何学研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	満淵 俊樹 (Mabuchi Toshiki) (80116102)	大阪大学・その他部局等・名誉教授 (14401)	
研究分担者	大川 新之介 (Ohkawa Shinosuke) (60646909)	大阪大学・理学研究科・准教授 (14401)	
研究分担者	石田 政司 (Masashi Ishida) (50349023)	大阪大学・理学研究科・教授 (14401)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	榎 一郎 (Ichiro Enoki) (20146806)	大阪大学・大学院理学研究科・准教授 (14401)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計8件

国際研究集会 第27回複素幾何研究集会	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 第6回日中幾何学研究集会	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 第26回複素幾何シンポジウム	開催年 2020年～2020年
国際研究集会 The 6th Workshop "Complex Geometry and Lie Groups" 15-20 February 2021	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Complex Geometry and Lie groups at Firentze, Italy	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 第4回日中幾何学研究集会 合肥 中国	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 第24回複素幾何シンポジウム 金沢	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 第28回複素幾何学シンポジウム	開催年 2022年～2022年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関