

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 9 月 24 日現在

機関番号：34416

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01121

研究課題名(和文) 対称マルコフ過程のスペクトルの性質と確率解析

研究課題名(英文) Spectral properties of symmetric Markov processes and stochastic analysis

研究代表者

竹田 雅好 (Takeda, Masayoshi)

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号：30179650

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,200,000円

研究成果の概要(和文)：緊密性を持つ対称マルコフ過程をクラス(T)とよび、一次元拡散過程の次に考察すべき対象として提案した。クラス(T)に属するマルコフ過程の著しい挙動と生成作用素のスペクトル論的性質を調べることで、準定常分布、ヤグロム極限の存在と一意性を示した。シュレディンガー形式における臨界性理論の構築した。劣臨界性、臨界性をディリクレ形式における再帰性、過渡性の拡張概念と考え、劣臨界性、臨界性をh-変換をとうしてディリクレ形式の再帰性、過渡性に帰着した。シュレディンガー作用素の臨界性は、臨界的なハーディ型不等式を導かれることを用いて、フェラーの再帰性の判定条件から、臨界的なハーディ型不等式を系統的に導いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一次元拡散過程の結果を多次元の場合に拡張するためには、取り扱いやすいクラスを設定する必要がある。本研究でクラス(T)を提案し、そのスペクトルの性質を調べることで、実際に取り扱い易いクラスであることが実証でき、応用として広い応用を持つ準定常分布やヤグロム極限の存在と一意性がクラス(T)に対して示せたことは意義深い。

シュレディンガー形式における臨界性理論の構築し、ディリクレ形式における再帰性から、臨界的なハーディ型不等式を示せることは新しい。フェラーの再帰性の判定条件から、臨界的なハーディ型不等式を系統的に導ける事実は、数学における基本的な不等式であるハーディ型不等式に関する理解が深まる。

研究成果の概要(英文)：We call symmetric Markov processes with tightness property Class (T) and propose that they are the next target to be considered, We show some sample path properties and spectral properties of generators. As an application, we show the existence and uniqueness of quasi-stationary distributions for symmetric Markov processes in Class (T). We construct a criticality theory of Schroedinger forms, The criticality and subcriticality of Schroedinger forms are regarded as generalized notions of the recurrence and transience of Dirichlet forms and critical Schroedinger forms are constructed by h-transform of recurrent Dirichlet forms. Critical Schroedinger forms lead to critical Hardy-type inequalities. Thus we obtain critical Hardy-type inequalities by h-transform of recurrent Dirichlet forms. As an application, we derive in unified manner optimal Hardy-type inequalities from Feller's recurrence criterion.

研究分野：確率論

キーワード：対称マルコフ過程 対称ディリクレ形式 準定常分布 シュレディンガー形式 ハーディ型不等式

1. 研究開始当初の背景

確率過程の研究において、与えられた適切なデータをもとにマルコフ過程を構成し、その性質を調べることは最も基本的な問題である。ユークリッド空間内の領域やリーマン多様体など可微分構造をもつ空間においては、一つの強力な構成法として確率微分方程式の理論があり、既に深い理論と広汎な応用が展開されている。一方、局所構造が古典的なものと本質的に異なる特異な空間上のマルコフ過程に対しては、ディリクレ形式による方法が有効である。しかし、ディリクレ形式の理論は L^2 理論であり、マルコフ過程の経路やその汎関数の確率論的な性質を導くためには、更なる性質をディリクレ形式に仮定し読み取る必要がある。例えば、マルコフ半群を L^p -半群と見たときのスペクトル半径が p に依らないことを示し、 L^1 的な加法汎関数の性質を調べることはその一例である。一次元拡散過程の場合には、2つの境界がともにフェラーの意味で自然境界でなければ、スペクトル半径が p に依らないことが示せる。そのため、自然境界を持たない一次元拡散過程に近い性質を持つ多次元マルコフ過程のクラスを導入することが大切であった。本研究では、既約性、レゾルベント強フェラー性ととともに、鍵となる新しい性質、緊密性を持つ対称マルコフ過程のクラスを導入し、一次元拡散過程の次に考察すべき対象として提案してきた。また、導入されたクラスを、緊密性 (tightness) にちなんで、クラス (T) と名付けた。研究対象をクラス (T) に制限して、自然境界を持たない一次元拡散過程において得られている著しい性質を拡張することをめざし、対応するマルコフ半群のスペクトル的性質を調べ、その性質の応用を目標とした。

もう一つのテーマとして、マルコフ過程の重要な性質である再帰性・過渡性の拡張概念であるシュレディンガー作用素の臨界性・劣臨界性に興味があった。シュレディンガー作用素の臨界性は精密なハーディ不等式を得るための道具になるとを、Pinchover らの論文で知り、ディリクレ形式における拡張ディリクレ空間の基礎理論を h -変換を通じてシュレディンガー形式に拡張することを考え、フェラーの再帰性条件と精密なハーディ不等式を関係つけることにより、古典的なハーディ不等式を系統的に導き、さらに新たなハーディ不等式を得ることができるはずだと考えていた。

2. 研究の目的

(1) 緊密性をもつ対称マルコフ過程のスペクトル的性質、特に、半群のコンパクト性、基底関数の可積分性と一様な大偏差原理を応用して、準定常分布の存在と一意性を解明し、緊密性をもつマルコフ過程、特に飛躍を持つ場合に準定常分布の存在・一意性の応用例を見出す。マルコフ半群の超縮小性を示し、準定常分布がヤグロム極限にもなっていることを示す。クラス (T) に属し、かつ超縮小性を持つ対称マルコフ過程の例を見つける。

(2) 再帰的ディリクレ形式と臨界的なシュレディンガー形式が h -変換を通して結びつくことを用いて、最適なハーディ型不等式を統一的に導く。特に、フェラーの再帰性判定条件を応用することで、古典的に重要なハーディ型不等式が導かれることを確認することで、われわれの方法の有効性を示す。さらに、得られたハーディ型不等式が臨界性・最適性を持つための条件を、基底関数が属する空間、拡張ディリクレ空間や拡張シュレディンガー空間の言葉で与える。

3. 研究の方法

研究開始当初の背景で述べたように、福島正俊により構築されたディリクレ形式による対称マルコフ過程の構成方法を利用する。ディリクレ形式の理論は、マルコフ性をもつ正值二次閉形式として定義され、「その定義域に十分豊富な連続関数を含む」という確認が容易な条件のもと、対称マルコフ過程が構成される。特段の空間構造を必要としない柔軟さが大きな利点がある。本研究テーマに対しては、ディリクレ形式理論の応用とその基礎理論の精密化をすることにより考察する。しかし、ディリクレ形式理論は L^2 理論であり、マルコフ過程の経路やその汎関数の確率論的な性質を導くためには、さらなる仮定が必要になる。従来の研究で、Donsker-Varadhan 大偏差原理の生存時間が有限である対称マルコフ過程への拡張を行い、その応用として半群の L^p -独立性を示した。すなわち、半群のスペクトル半径が p に依らないことを示したが、その応用を考えることが本研究の主目的であり、また主たる方法である。

対称ディリクレ形式の再帰性・過渡性を与える条件は、拡張ディリクレ空間の言葉で与えられる。したがって、再帰性・過渡性の拡張概念であるシュレディンガー形式の臨界性・劣臨界性も拡張ディリクレ空間の概念を拡張して得られる拡張シュレディンガー空間を導入し、その空間で特徴づける。再帰的なディリクレ空間から h -変換をとおして臨界的シュレディンガー形式が構成される。臨界的シュレディンガー形式は臨界的なハーディ型不等式を導く。再帰性も零再帰性と正再帰性に分類され、零再帰性を持つディリクレ形式は最適なハーディの不等式を導き、正再帰性を持つディリクレ形式は、臨界的ではあるが最適なハーディの不等式を導く、との方針で考察する。

4. 研究成果

マルコフ半群のスペクトル半径における L^p -独立性の応用として、ファインマン・カツツ汎関数の可積分性、ギルサノフ変換とハーディの不等式の関連を与える公式、初期値に一樣なドンスカー・ダアラダーン型大偏差原理などの研究成果が、以前の研究により得られている。これらの結果を踏まえて本研究成果は得られた。具体的な研究内容としては、準定常分布に関する基礎理論を整備した。必ず消滅するとしても、ある時間スケールでは平衡状態を保っているようにみえる現象は多くある。このような現象を数学的にモデル化する一つの方法として、生存時間が有限なマルコフ過程が用いられる。消滅するマルコフ過程が準定常分布を持ち、準定常分布に収束する(ヤグロム極限)速さに比べて消滅する速度の方がはるかに遅いことを示すことでこの現象は説明される。数学的には準定常分布の存在と一意性、ヤグロム極限の存在について調べることが重要になる。しかしこれらの事実は、出生死滅過程や一次元拡散過程の場合にのみ詳しく分かっているだけで、多次元空間上のマルコフ過程に対して満足できる結果はなかった。境界が複雑なため、一次元拡散過程におけるフェラーの境界分類に対応する理論が存在しないことが主な理由であると考えられる。そこで、一般の多次元マルコフ過程を研究対象にするのではなく、一次元拡散過程に近い性質をもつ多次元マルコフ過程のクラスの導入が大切になる。そしてクラス (T) と呼ぶクラスを導入し、一次元拡散過程の次に考察すべき対象として扱った。クラス (T) に属するマルコフ過程の性質、例えば、半群のコンパクト性や基底関数の可積分性を示すことにより、準定常分布の存在と一意性を示した。必ずしも有界とは限らない領域の上の吸収壁対称安定過程がクラス (T) に属することを確認し、準定常分布についての存在と一意性を示した。多次元空間上の飛躍過程に対する応用例としては新しい結果である。無限遠点の近傍で発散する性のポテンシャルで消滅を与えてできるブラウン運動に対しても、準定常分布の存在と一意性を発散の速さに対する条件で与えることができた。さらに、マルコフ半群の超縮小性を検証することで、準定常分布がさらにヤグロム極限になることが示

せた。上で述べた吸収壁対称安定過程の場合には超縮小性を持つことが確認でき、ヤグロム極限になっている。準定常分布を構成するためには、基底関数の可積分性が必要になる。基底関数は最小固有関数として L^2 関数であるが、対称化測度が有限とは限らないため、一般には L^2 関数が L^1 関数になるとは限らない。クラス (T) に属する対称マルコフ過程の基底関数は、常に L^1 関数になるという事実は、思いがけない事実であった。その他の副産物として、クラス (T) に属する対称マルコフ半群はコンパクトな作用素になることや、基底関数は有界な連続関数になることが示せ、導入したクラス (T) が、取り扱い易い意味のあるクラスであることを示唆している。

ヤグロム極限に関連する話題として、処罰問題と呼ばれている極限定理がある。固定された時間間隔における正規化測度の収束に関係した極限で、対称安定過程におけるファインマン・カツ汎関数による処罰問題について考察し、処罰問題を解決した。

ハーディ型不等式は偏微分方程式論に多大な応用例をもつ不等式として、膨大な結果が知られている。本研究では、ディリクレ形式におけるハーディ型不等式について、新たな視点を与えた。ディリクレ形式の再帰性とシュレディンガー形式の臨界性は Doob の h -変換をとおして互いに結びつく。さらに、シュレディンガー形式の臨界性は臨界的なハーディ型不等式を導く。この二つの事実を用いると、再帰的なディリクレ形式の h -変換によって臨界的なハーディ型不等式を得ることが可能となる。さらに、ハーディ・ウエイトに関する可積分条件を与え、さらに最適なハーディ型不等式であるかどうかの判定を可能にした。シュレディンガー形式が臨界性を持つための必要十分条件が、基底関数が拡張されたシュレディンガー空間に属することで与えられることを示した。このことは、ディリクレ形式が再帰性を持つための必要十分条件が、定数関数 1 が拡張されたディリクレ空間に属することで与えられるという定理の拡張になっている。拡張シュレディンガー空間の概念を応用した結果は従来にはなく、シュレディンガー形式の臨界性を研究するうえで、基本的な知見を与えている。

まずは、古典的に知られている有名なハーディ型不等式、例えば、ルレイの不等式などがこの考えに基づいて統一的に導出できることを確認した。ディリクレ形式の再帰性を示すことはシュレディンガー形式の臨界性を示すより簡単である。なぜなら、シュレディンガー形式の臨界性証明には正值の基底関数を見つけなければならないが、ディリクレ形式の再帰性証明には拡張されたディリクレ空間に定数関数 1 が属し、そのディリクレ・ノルムが零となることを示せばよい。我々のアプローチにより、最適なハーディ型不等式の例を系統的に発見することを可能にする。重みをつけてハーディ型不等式を拡張することは、ディリクレ形式の立場からはドリフトの変換を考察することに対応しており、容易である。従来の有名な重み付きハーディ型不等式も、この立場から導かれることは確認済みである。

回転対称な強局所性をもつディリクレ形式の再帰性証明に関しては、一次元拡散過程の再帰性の証明に帰着される。すなわち、2つの境界がフェラーの再帰性判定条件を満たすことで確認できる。フェラーの再帰性判定条件は、スケール関数を用いた積分条件で確認できる。したがって、回転対称な強局所性をもつディリクレ形式に対するハーディ型不等式はフェラーの再帰性判定条件から簡単に導くことができる。フェラーの再帰性判定条件とハーディ型不等式の関係を与えた結果はなく、ハーディ型不等式に新たな視点を与える結果である。

拡張シュレディンガー空間は一般に拡張ディリクレ空間を含む。拡張シュレディンガー空間に属する基底関数が存在することを示すことで、シュレディンガー形式の臨界性が示されたが、基底関数が拡張シュレディンガー空間には属するが拡張ディリクレ空間には属さない場合、拡張ディリクレ空間に属する場合のそれぞれに、最適なハーディ型不等式であるか臨界的ではある

が最適なハーディ型不等式ではない場合が対応していることが分かった。すなわち、基底関数がディリクレ空間に属する場合には、ハーディ型不等式における両辺に基底関数を代入することができる。すなわち、基底関数がハーディ型不等式において等号を成立させる関数となっている。基底関数が拡張シュレディンガー空間には属するが拡張ディリクレ空間には属さない場合には、基底関数をハーディ型不等式の両辺に代入すると発散してしまい意味を持たない。すなわち、ハーディ型不等式において等号を成立させる関数は存在しない。この認識は、ハーディ型不等式の最適性に関する視点を与えている。再帰性に関しては、零再帰性と正再帰性の区別がある。再帰性と臨界性の対応で考えれば、零再帰性を持つディリクレ形式から h -変換をとって得られるハーディ型不等式が最適であり、正再帰的なディリクレ形式から h -変換をとって得られるハーディ型不等式は臨界的ではあるが最適ではないという知見が得られた。

劣臨界性を持つシュレディンガー形式からどのような正のポテンシャルを加えることにより臨界的なシュレディンガー形式が構成できるか考察し、加えるポテンシャルに対する十分条件を与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masayoshi Takeda	4. 巻 60
2. 論文標題 Optimal Hardy-type Inequalities for Schroedinger Forms	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Osaka J. Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Takeda, T. Uemura	4. 巻 376
2. 論文標題 Criticality of Schroedinger Forms and Recurrence of Dirichlet Forms	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 4145-4171
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/8865	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masayoshi Takeda	4. 巻 295
2. 論文標題 Criticality of Schrodinger forms and Liouville-type property	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 395-413
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/mana.202000047	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masayoshi Takeda	4. 巻 64
2. 論文標題 Maximum principles for generalized Schroedinger equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Illinois J. Math	6. 最初と最後の頁 119-139
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/00192082-8165622	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masayoshi Takeda	4. 巻 250
2. 論文標題 Potential theory for Green functions of Schroedinger-type operators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Studia Math.	6. 最初と最後の頁 109-127
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/sm171220-6-11	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yunke Li and Masayoshi Takeda	4. 巻 148
2. 論文標題 Feynman-Kac penalizations of rotationally symmetric alpha-stable processes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Statistics and Probability Letters	6. 最初と最後の頁 82-87
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spl.2019.01.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Masayoshi Takeda	4. 巻 372
2. 論文標題 Compactness of symmetric Markov semigroups and boundedness of eigenfunctions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 3905-3920
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/7664	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masayoshi Takeda	4. 巻 32
2. 論文標題 Existence and uniqueness of quasi-stationary distributions for symmetric Markov processes with tightness property	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Theor. Probab.	6. 最初と最後の頁 2006-2019
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10959-019-00878-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 M. Takeda
2. 発表標題 Optimal Hardy-type inequalities for Schrodinger forms
3. 学会等名 The workshop "Pseudo-Differential Operators and Markov Processes" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 竹田雅好
2. 発表標題 ディリクレ形式と緊密性を持つ対称マルコフ過程
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 竹田雅好
2. 発表標題 Quasi-stationary distributions for absorbing symmetric stable processes
3. 学会等名 研究集会「The tenth meeting on probability and PDE」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 竹田雅好
2. 発表標題 Schrodinger形式におけるLiouville型定理について
3. 学会等名 研究集会「マルコフ過程とその周辺」
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	桑田 和正 (Kuwada Kazumasa) (30432032)	東北大学・理学研究科・教授 (11301)	削除：2018年11月9日

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------