

令和 6 年 6 月 15 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01122

研究課題名（和文）作用素環論に基づく非可換解析学

研究課題名（英文）Noncommutative analysis based on operator algebras

研究代表者

植田 好道（Ueda, Yoshimichi）

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：00314724

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 7,800,000円

研究成果の概要（和文）：以前に導入した自由化過程に対応するランダム行列モデルに対する大偏差原理について、特に、そのレート関数の時間無限大極限の挙動を明らかにした。結果として、軌道自由エントロピーと自由相互情報量の関係に関わる問題の多くが完全な大偏差原理を確立することにより解決できることを明らかにした。次にコンパクト量子群の帰納極限のユニタリ球表現論を含むかなり抽象的な枠組を与え、その基礎理論を構築した。また、非可換解析の立場から2変数の関数計算に埋もれていた研究を発掘し、徹底的な形で再定式化し基礎理論を構築した。他にも非可換解析学に関わるさまざまな研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非可換解析学はさまざまな意味で受け取り得るが、ヒルベルト空間上の作用素が何らかの形で関わる解析学の問題を作用素環論を踏まえつつ、作用素環論の外部に広がった形で研究を遂行した。自由化過程のランダム行列モデルは新奇なものであり、さまざまな発展が期待できる。また、球表現に関わる研究はここまで徹底した量子群の帰納極限を扱うのに使える枠組はこれまでに与えておらず、出発点になりうるだろう。さらに2変数の関数計算の研究は基礎中の基礎というべきものなので、これまで散発的な研究で無駄が多かった部分を交通整理しており、近年の量子情報理論での利用を見るとその有用性は明らかと思われる。

研究成果の概要（英文）：I worked out the random matrix model for liberation process that I introduced and studied before, and the consequence is that many problems concerning the relationship between orbital free entropy and free mutual information are reduced to the full large deviation principle for the random matrix model. I introduced a rather general framework including the spherical representation theory for inductive limits of compact quantum groups and gave its basic theory. I also gave a thorough theory for 2-variable functional calculus for Hilbert space operators. Additionally, I did various studies in non-commutative analysis.

研究分野：関数解析，作用素環論，非可換確率論

キーワード：ランダム行列 大偏差原理 量子群 ユニタリ表現論 作用素 関数計算 非可換 L_p 空間 量子ダイバジェンス

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

作用素環自体の詳しい研究,具体的にはある種のクラスの作用素環の分類,あるいは特定の作用素環上の群作用の分類が作用素環論の主流であって,そういった成果が高く評価される.私自身も作用素環,特に von Neumann 環の構造解析の研究を行って来ていたが,自由確率論と呼ばれる非可換確率論の研究も進めていた.自由確率論は確率論の単なる非可換類似追求理論ではなく,(複数個の)ランダム行列の行列サイズ無限大極限を扱う理論という側面が大きく,近年は伝統的な確率論を出自とする作用素環論に明るくない研究者たちが中心となって研究を進めていた.そこに作用素環論の新たなツールの開発が必要とされているが,当該研究者らに十分な作用素環論のスキルがないように見えた.

2. 研究の目的

上述の状況を踏まえて,より様々な分野からの要請を踏まえた作用素環論の構築を目指したいとナイーブに考えた.もちろん,ある程度具体的な問題にしないと何も生み出せないで,当時,私が把握していた問題の解決を目指す中で,必要な作用素環論の新たな枠組やツールの開発を目指した.

具体的には, C^* -環, von Neumann 環のいずれも有界関数に相当するものしか原理的に取り込めない.通常の解析学で有界関数しか扱えないとなると窮屈なのは明らかである.このことに由来する不都合が様々な形で非可換解析学的研究に現れる.このような困難の現れ方を詳しく検討し,適切な処方箋を見出したい.必要なら標準的な作用素環論の枠組を拡張したい.また,作用素環論の応用先として,物理量が自己共役作用素で与えられる量子論に関わる様々な話題が考えられるが,そのためには作用素を変数とする関数と言ったものの定式化や深い理解が必要になる.こう言ったことの解決に向けた研究を行いたい.

3. 研究の方法

現実的なこととして,抽象的に考えるのは非生産的と考えて,研究開始時点で,ある程度具体性を持って考えることができたいくつかの問題の解決に取り組む中で上記目的を満足する研究を展開することを考えた.また,上記研究目的を共有する後進の育成にも留意することとした.具体的には,積極的に海外を訪ね,情報収集・研究討論を行なうと共に,これまでの私の研究を超えた専門性を持ち,国内に存在しない方向性を持った研究者を招聘し,連続講演等を依頼するなどの方策も考えた(が,3年目からは予期しなかったコロナ禍に襲われこの点に関しては困難を極めた).

4. 研究成果

(自由確率論・ランダム行列理論)

自由化過程に対応するランダム行列モデルの研究を進めた.すでにレベル3の大偏差原理の「半分」(上からの評価)を確立しており,結論として確率過程として確率1で収束することなどを証明していた.引き続きレート関数の詳しい解析,軌道自由エントロピーとの関係,さらに,得られたレート関数に基づく自由確率版相互情報量の定式化などを行った.

ユニタリ行列値 Brown 運動に対しても大偏差原理の上からの評価を得ることができることも明らかにした.

この研究の過程で,自由確率論の枠組での確率微分方程式の研究で足りないことを明確にした.公表していないが,マルチンゲール問題の端緒となるべき考察を行った.さらにレート関数を深く検討した結果として,自由化過程に適切なドリフト項のなす Hilbert 空間の構成なども行った.

本研究に関連して,ユニタリ行列値 Brown 運動の行列サイズ無限大極限を自由確率論の道具を使って捕まえて Yang-Mills 理論を論じる研究の第一人者である Thierry Levy 氏を京都大学の Benoit Collins 氏と共同で招き,京都大学,名古屋大学において連続講義を行ってもらった.これは国内の自由確率論振興に向けた取り組みだった.

(無限次元ユニタリ球表現論)

大学院生時代の海外長期滞在中に得た問題意識,元学生の佐藤僚亮氏が研究したことを踏まえて,作用素環論の枠組を適切に解釈してユニタリ球表現を抽象的に定式化して,その基礎理論の構築に取り組んだ.特別な場合としてコンパクト(量子)群の帰納極限に対するユニタリ球表現論を含む.佐藤氏はコンパクト量子群の帰納極限に対するユニタリ指標の概念とその研究の枠組を提案し,それが Vadim Gorin 氏,Grigori Olshanski 氏らが展開していた Vershik-Kerov 理

論の確率論部分の q -変形の表現論的解釈を与えることを示していたが、ユニタリ指標の定式化がそうであるべき積極的理由がないなど 私から見て不満なところがあった。それを解決すべく、ユニタリ球表現論の枠組を適切に定式化し、そこから自然に佐藤氏の意味のユニタリ指標が現れることを証明した。

実際、必要な基礎理論を構築し、さらに量子群の場合に以前のものよりも自然な構成を与え、普遍包絡環が見える形にした。さらに、量子群の設定ではユニタリ指標がトレイスでないことから、Vershik-Kerov 理論のように K -理論とうまく結びつかないため、 K -理論自体を変形するアプローチと竹崎双対と III 型因子環の構造定理のアイデアを流用して、考察の代数系を膨らませることにより K -理論に繋ぐアプローチの二つを与えた。前者のアプローチでは表現環の構造が見え、後者のアプローチだと K -理論に直接的につながる。両者の関係を詳細に調べることは今後の課題として残った。

また本研究課題の目的の一つである作用素環論をアップデートするという観点から言うと、コンパクト量子群の帰納極限は無限次元量子群と言ったもので、局所コンパクト性の枠組を超えるため、標準的な作用素環論の枠組にマッチしない。そこで、 C^* -環とフォンノイマン環のハイブリッド的な構造を考えるとという処方箋を考え、さらに $-C^*$ 環の概念も加えて考察するというアイデアを出した。

この方向に関連して可積分確率論の専門家、具体的には Gorin 氏、Olshanski 氏などを数理研で計画した 1 年間の作用素環論のプロジェクト研究に絡めて招聘する方向で動いたが、コロナ禍で断念することになった。本研究課題の延期時に更なるこの方向の発展のためオスロ大学の山下真氏に名古屋大学に来て頂き、彼らが進めた量子対称空間の研究について情報提供してもらった。そこで展開された技法を取り込むのは今後の課題である。

(作用素論)

Hilbert 空間上の自己共役作用素 A, B に対して、その関数 $f(A, B)$ を考えたいというのは、例えば量子ダイバージェンスを考える時などに決定的に必要なことである。しかし、 AB と BA が異なるという非可換性ゆえに自明なことではなく、また $f(A, B)$ の候補も多数生じるのが普通である。作用素論で古くから研究されているものとして、半正定値な A, B の作用素平均と呼ばれるものがある。さらに、最も古い作用素平均は作用素幾何平均であり、その源流は Pusz-Woronowicz によるものとされている。学生指導の過程でこの辺りのことを調査すると、安藤毅氏が Pusz-Woronowicz の仕事を検討し、氏の流儀で作用素の言葉で再定式化したものをほぼ全員の研究者が利用していることがわかった。さらに、最近では Lieb 氏らの量子論由来の作用素・トレイス不等式の研究を踏まえて Edward Effros 氏が作用素パースペクティブなる関数計算法を導入していた。しかし、その定式化も安藤流に基づいていた。

そこで学生の波多野奏恵氏と共に Pusz-Woronowicz の研究を詳細に検討し、安藤氏が着目したと思われる部分を同定した。引き続き、Pusz-Woronowicz の定式化を全面的に詳細に検討し、安藤氏が着目した部分ではないところを踏まえる方がより柔軟性が高く、また、作用素平均、作用素パースペクティブを全て含む広い自然な枠組を与えることが判明し、そのことを説明する短い論文を波多野氏と書いた。

この仕事の直前にカナダの研究集会に参加し、国内に研究者のいない非可換関数の理論の講演を集中的に聞く機会を得た。そこで得た情報は直接的に学生の荒神健太氏に伝えることにより、荒神氏が非可換関数の研究に乗り出すきっかけとなった。他方で、この 2 変数関数計算の研究にも大きく影響した。実際、非可換関数の方法で Pusz-Woronowicz の関数計算を抽象的に定式化することが可能で、より徹底した理論整備が可能になるというアイデアを得た。同時期に作用素パースペクティブの理論に関する不満解消に取り組んでいた日合文雄氏と和田周平氏と合流し、このアイデアに Uffe Haagerup の作用素値荷重の研究で与えられたアイデアを合わせて、作用素パースペクティブの完全な定式化と基礎理論の構築を日合氏、和田氏と共にやった。

また、作用素平均とは独立に安藤氏が導入した作用素に対する Lebesgue 分解の理論も Pusz-Woronowicz のアイデアを使うと Radon-Nikodym の定理の Hilbert 空間証明とパラレルな理論が構築できることを学生の粟飯原佳希氏と明らかにして、安藤氏の理論を再構築する論文を公表した。

(非可換関数環理論)

1950-60 年代に精力的に研究された関数環(連続関数のなす環のノルム閉な非自己共役部分環)の研究の非可換バリエーションは Arveson 氏の 69-71 年の連作に遡る。ある種の非可換解析であり、作用素環論、作用素論にまたがる一大インダストリーに発展している。Arveson 氏の連作で与えられた境界定理に非可換ポアソン境界のアイデアを使った極めて簡明な証明を与えた。

なお、この方向の研究者は国内に現在皆無で、研究振興のため Matthew Kennedy 氏を Collins 氏と共同で招き、当時最新の非可換 Choquet 理論についての連続講義を名古屋大学で行ってもらった。

(代数的場の量子論)

2010 年頃から会うたびに Roberto Longo 氏から質問されていた片側モジュラー包含についての問題を谷本溶氏の協力を得て具体的に着手し、Longo 氏、谷本氏と共に解決し、論文公表に至った。

た．これはカイラル共形場理論などに対応する作用素環ネットの構成に深く関係する問題であった．

この過程で谷本氏から代数的場の量子論に関して様々なことを習った．その直後からコロナ禍に入ったのだが，オンライン研究会／講演を視聴することが多くなり，その中で Witten 氏がブラックホールエントロピーの問題にフォンノイマン環の理論を使うアプローチを提案していることを知った．Witten 氏らの論文では物理的な議論も多く，未だ全貌を完全に把握していないが，竹崎双対を使う部分に着目し，色々と検討している．そこで得たエンタングルメント・エントロピーの定式化に違和感を感じており，その違和感を解決するための作用素環の道具の開発に着手した．

(量子情報理論)

コロナ禍中に，やはり後進の育成も考慮して，日合氏に量子ダイバージェンスのオンライン連続講義をしてもらった．これは量子ダイバージェンスの図書を日合氏が執筆中であることを聞いたからであった．その講義を聞いていて $-$ Renyi ダイバージェンスの加法性の厳密な証明が与えられていないこと，および荒木不二洋氏の相対モジュラー作用素と Haagerup 氏の非可換 L_p 空間の道具が混在することに不満を覚えた．III 型フォンノイマン環の構造解析でよく知っていた技法を使ってテンソル積フォンノイマン環に付随する非可換 L_p 空間の構造を明らかにし，その応用として $-$ Renyi ダイバージェンスの加法性に厳密な証明を与えた．さらに学生の加藤慎也氏と議論する中で $-z$ -Renyi ダイバージェンスの一般のフォンノイマン環の設定での定式化および $-z$ -Renyi ダイバージェンスの加法性に対する部分的な成果を得た．以上を論文にして加藤氏と共著の形で公表した．なお， $-z$ -Renyi ダイバージェンスの基礎理論は，引き続き加藤氏および名古屋大を訪問した Anna Jencova 氏，日合氏により一般のフォンノイマン環の設定で速やかに完成した．

なお，有限次元の設定で $-z$ -Renyi ダイバージェンスの基礎理論が完成したのは Carlen 氏，Lieb 氏と言った錚々たる専門家らの努力の後，2020 年の Zhang 氏の仕事であり驚異的なスピードであり，その進展には，加藤氏，日合氏，Jencova 氏，私が名古屋大学で議論する機会を持ったことが大きな役割を果たし，この研究の進展に本研究課題の資金が有効に使われたことは記録しておきたい．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Kato Shinya, Ueda Yoshimichi	4. 巻 275
2. 論文標題 A remark on non-commutative L^p -spaces	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Studia Mathematica	6. 最初と最後の頁 235 ~ 248
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/sm230724-11-10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Aibara Yoshiki Aibara, Ueda Yoshimichi	4. 巻 45
2. 論文標題 Lebesgue Decomposition for Positive Operators Revisited	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada	6. 最初と最後の頁 37-55
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 UEDA YOSHIMICHI	4. 巻 -
2. 論文標題 SPHERICAL REPRESENTATIONS FOR \mathbb{C} -FLOWS III: WEIGHT-EXTENDED BRANCHING GRAPHS	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of the Australian Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1 ~ 34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S1446788724000053	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ueda Yoshimichi	4. 巻 16
2. 論文標題 Spherical representations of C^* -flows, I	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Muenster Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 201-263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.17879/51009602509	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hiai Fumio, Ueda Yoshimichi, Wada Shuhei	4. 巻 94
2. 論文標題 Pusz-Woronowicz Functional Calculus and Extended Operator Convex Perspectives	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Integral Equations and Operator Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00020-021-02676-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ueda Yoshimichi	4. 巻 18
2. 論文標題 Spherical Representations of C^* -Flows II: Representation System and Quantum Group Setup	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2022.050	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hatano Kanae, Ueda Yoshimichi	4. 巻 87
2. 論文標題 Pusz--Woronowicz's functional calculus revisited	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Acta Scientiarum Mathematicarum	6. 最初と最後の頁 485 ~ 503
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14232/actasm-021-263-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ueda Yoshimichi	4. 巻 73
2. 論文標題 Matrix Liberation Process II: Relation to Orbital Free Entropy	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Canadian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 493 ~ 541
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/S0008414X20000048	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Longo Roberto, Tanimoto Yoh, Ueda Yoshimichi	4. 巻 69
2. 論文標題 Free products in AQFT	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Fourier	6. 最初と最後の頁 1229 ~ 1258
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/aif.3269	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ueda Yoshimichi	4. 巻 13
2. 論文標題 A free product pair rigidity result in von Neumann algebras	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Noncommutative Geometry	6. 最初と最後の頁 587 ~ 607
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JNCG/332	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kei Hasegawa and Yoshimichi Ueda	4. 巻 119A
2. 論文標題 On Arveson's boundary theorem	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Math. Proc. Royal Irish Acad.	6. 最初と最後の頁 1-5
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3318/pria.2019.119.01	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 植田 好道
2. 発表標題 Spherical representations of C^* -flows
3. 学会等名 作用素環論の最近の進展, RIMS (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yoshimichi Ueda
2. 発表標題 On Arveson's boundary theorem
3. 学会等名 東大京大合同オンライン作用素環セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshimichi Ueda
2. 発表標題 Matrix liberation process and orbital free entropy
3. 学会等名 作用素環論研究者シンポジウム「作用素環論の最近の進展」Online（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshimichi Ueda
2. 発表標題 Spherical representations for C^* -flows
3. 学会等名 C^* -seminar, University of Oslo; Online.（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshimichi Ueda
2. 発表標題 On Arveson 's boundary theorem
3. 学会等名 Interactions between Noncommutative Analysis and Quantum Information Theory（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshimichi Ueda
2. 発表標題 Free independence, orbital free entropy and matrix liberation process
3. 学会等名 Interactions between commutative and non-commutative probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshimichi Ueda
2. 発表標題 A new approach to free mutual information
3. 学会等名 Non-commutative Probability and Related Fields (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 植田 好道
2. 発表標題 On Arveson 's boundary theorem
3. 学会等名 作用素論・作用素環論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshimichi Ueda
2. 発表標題 On Arveson's boundary theorem
3. 学会等名 Seminario, Dipartimento di Matematica, Universita degli Studi di Roma Tor Vergata (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

植田のホームページ(論文・プレプリント)
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~ueda/publ.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------