

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 1 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01124

研究課題名(和文) 行列式点過程の視点によるランダム現象の解析とその応用

研究課題名(英文) Analysis of random phenomena and its applications from the viewpoint of determinantal point processes

研究代表者

白井 朋之 (Shirai, Tomoyuki)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：70302932

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,900,000円

研究成果の概要(和文)：電子(フェルミオン)の重要な性質の一つである反発性を抽象して得られる、確率分布が行列式を用いて記述される確率モデルは行列式点過程とよばれる。一見、電子とは無関係である多くの問題に、この行列式点過程の構造が潜んでいることが知られている。本研究では、そういった種々の行列式点過程について、特に確率論の中心課題である漸近挙動や極限定理を中心にランダム現象の解析を行い、それらをワイヤレスネットワークなどの具体的な問題へ応用した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

行列式点過程は、数理科学の中の多くの分野で現れる負の相関をもつランダム現象を記述する確率モデルである。行列式点過程の構造および性質を深く掘り下げることによりランダムな現象を解析した本研究は、数学としての確率論の一分野に貢献するとともに、機械学習やワイヤレスネットワークなど実世界の問題にも応用された例を鑑みると、未来のテクノロジーや社会の様々な分野で活用されるポテンシャルも期待される。

研究成果の概要(英文)：A stochastic model in which the probability distribution is described by a determinant, obtained by abstracting the repulsive nature of electrons (fermions), is called a determinantal point process. It is known that the structure of the determinantal point process is hidden in many problems that are seemingly unrelated to electrons. In this study, we analyze random phenomena of such various determinantal point processes, especially focusing on asymptotic behavior and limit theorems, which are central issues in probability theory, and apply them to specific problems such as wireless networks.

研究分野：確率論

キーワード：行列式点過程 ガウス型解析関数 ガウス型ローラン級数 Weyl - Heisenberg点過程 ワイヤレスネットワーク ダイソンブラウン運動 ランダム複体

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1 . 研究開始当初の背景

Ghosh-Peres らにより点過程の剛性の概念が導入されたのを契機に , 剛性の視点からの点過程の研究は活発化し , 一方 , 物理学者の Torquato らは超一様性(格子ほどではないが点配置のゆらぎが小さい点過程)という概念を用いて物質の性質を調べていた . Ginibre 点過程の場合には , 代表者が剛性に同等な Palm 測度の絶対連続性や超一様性を示していた . このような背景で , 国内外の行列式点過程の研究者は研究開始当初増えつつあり競合かつ協同の状態にあり , 剛性と超一様性を一つのキーワードとして , 行列式点過程の関連研究が活発になり始める流れの中で本研究は始まった .

## 2 . 研究の目的

ランダム行列の固有値や一様全域木などにあられる行列式的構造は申請者の以前の研究により行列式点過程として抽象化された . 異なる分野で個別に研究されていた対象が共通の視点を持つことにより , 統一的かつ有機的に扱うことが可能となった . 本研究の目的は , 行列式点過程の構造とそれに付随する代数的・組合せ論的構造に着目した種々のランダムな現象の解析である .

## 3 . 研究の方法

Weyl-Heisenberg 点過程・ランダム複体・ランダム解析関数・点過程の剛性・点過程の時間発展などに代表される個々の問題を行列式点過程の視点から同時に詳しく調べることにより , 行列式点過程の理論をさらに深化させるとともに , この枠組みには入らないランダム現象の解析を可能にする新たな枠組みを構築する .

## 4 . 研究成果

- (1) 円型ユニタリアンサンプル CUE のランダム行列の固有値は円周上の行列式点過程となるが , その  $n$  次元球面上への一般化である spherical ensemble に付いて考察して , 適当なスケール極限を考えると , 相関核が Bessel 関数で表現される行列式点過程に弱収束することを示した .
- (2) (1)の問題の一般化として , コンパクトリーマン多様体上の行列式点過程を指数写像による引戻した余接空間上の点過程について , その適切なスケール極限が ,  $n$  次元球面の定義関数のフーリエ変換を用いて表現される相関核に付随する普遍的な行列式点過程に弱収束することを示した .
- (3) 単連結領域のガウス型解析関数の零点の研究は多くあるが , 多重連結領域上のランダム解析関数の零点の研究はそれほど多くはない . その手始めとして , 円環領域上のガウス型解析関数の零点について研究を行い , McCullough-Shen による円環上のセゲー核の研究を手がかりに , まず自然な円環領域上のガウス型解析関数を定義して , その零点について , 通常円板領域のガウス型解析関数の零点とは違う性質を持つことを示した .

- (4) Ginibre 点過程の一般化の一つの方向性として、Weyl-Heisenberg 型の点過程の観点を模索してきた。相関核から定まる再生核ヒルベルト空間の構造に着目すると行列式点過程が定まるが、二つのヒルベルト空間の間の部分等長作用素を用いて再生核を構成して、内在する作用素の双対性を行列式点過程の双対性として捉えることに成功した。さらに、その部分等長作用素が局所ヒルベルト・シュミット作用素の場合には、従来相関核自身が局所トレース族で考えられていた設定をさらに詳しく分解した状況を与えていることを示した。
- (5) ハイゼンベルグ型の複素空間上の行列式点過程の点の個数について調べた。特に、一般次元の複素空間内で行列式点過程が超一様性を持つことを証明し、さらに局所数分散に対する漸近展開公式を得た。
- (6) Ginibre 点過程や摂動格子などの定常点過程に従って  $d$  次元ユークリッド空間上に配置される無線セルラーネットワークの空間確率モデルにおいて、無線通信における重要な量の信号対雑音比(SINR)の数値計算及びパーシステント図による点過程の比較を行った。
- (7) 3種類の1次元の対数ガスモデル(ダイソンプラウン運動など)の流体力学的極限を考察し、対応する測度値過程のコーシー変換が複素バーガス型の解となることを示した。
- (8) Peres-Virag らによって研究された円板上のガウス型解析関数の拡張にあたる、係数が独立でない定常ガウス過程からなるベキ級数として定まるガウス型解析関数の零点の個数の漸近挙動について詳しく調べた。
- (9) 香取氏は遠藤氏と佐久間氏との共同研究において、3種類の1次元の対数ガスモデル(ダイソンプラウン運動など)の流体力学的極限を考察し、対応する測度値過程のコーシー変換が複素バーガス型の解となることを示した。
- (10) 非衝突レジームにおけるダイソンプラウン運動の時間変化で駆動される多重シュラムレブナー発展を考察し、その解は連続曲線の族を生成し、さらに駆動するダイソンプラウン運動のパラメータの値によって単純非交差曲線、交差する曲線、空間充填曲線の族となることを示した。
- (11) ランダム全域非輪体を方体複体の設定で考察し、代数的力学系のエントロピーなどとの関連を視野に入れて考察した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計17件（うち査読付論文 17件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 11件）

1. 著者名 ESAKI Syota, TANEMURA Hideki	4. 巻 76
2. 論文標題 Stochastic differential equations for infinite particle systems of jump type with long range interactions	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 283-336
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/90289028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Makoto Katori and Tomoyuki Shirai	4. 巻 11
2. 論文標題 Partial Isometry, Duality, and Determinantal Point Processes	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Random Matrices: Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 2250025
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S2010326322500253	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Makoto Katori and Tomoyuki Shirai	4. 巻 392
2. 論文標題 Zeros of the i.i.d. Gaussian Laurent series on an annulus: weighted Szego kernels and permanental-determinantal point processes	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Commun. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 1099-1151
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-022-04365-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Makoto Katori and Tomoyuki Shirai	4. 巻 98
2. 論文標題 Local universality of determinantal point processes on Riemannian manifolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.	6. 最初と最後の頁 95-100
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.98.018karo071?	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kohei Noda and Tomoyuki Shirai	4. 巻 -
2. 論文標題 Expected Number of Zeros of Random Power Series with Finitely Dependent Gaussian Coefficients	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10959-022-01203-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Taiki Endo, Makoto Katori and Noriyoshi Sakuma	4. 巻 18
2. 論文標題 Functional Equations Solving Initial-Value Problems of Complex Burgers-Type Equations for One-Dimensional Log-Gases	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 SIGMA	6. 最初と最後の頁 049, 22pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2022.049	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takato Matsui, Makoto Katori and Tomoyuki Shirai	4. 巻 54
2. 論文標題 Local number variances and hyperuniformity of the Heisenberg family of determinantal point processes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 165201 (22pp)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/abecaa	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Katori Makoto and Koshida Shinji	4. 巻 54
2. 論文標題 Three phases of multiple SLE driven by non-colliding Dyson's Brownian motions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 325002 ~ 325002
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ac0dee	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Katori Makoto and Koshida Shinji	4. 巻 87
2. 論文標題 Gaussian free fields coupled with multiple SLEs driven by stochastic log-gases	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 315-340
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Makoto Katori and Tomoyuki Shirai	4. 巻 B79
2. 論文標題 Scaling limit for determinantal point processes on spheres	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 123-138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Katori Makoto, Koshida Shinji	4. 巻 61
2. 論文標題 Conformal welding problem, flow line problem, and multiple Schramm-Loewner evolution	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 083301 ~ 083301
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5145357	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Makoto Katori	4. 巻 371
2. 論文標題 Two-Dimensional Elliptic Determinantal Point Processes and Related Systems	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Commun. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 1283-1321
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-019-03351-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuji Hamana, Hiroyuki Matsumoto, and Tomoyuki Shirai	4. 巻 39
2. 論文標題 On the zeros of the Macdonald functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Opuscula Mathematica	6. 最初と最後の頁 361-382
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7494/OpMath.2019.39.3.361	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuaki Hiraoka, Hiroyuki Ochiai and Tomoyuki Shirai	4. 巻 84
2. 論文標題 Zeta functions of periodic cubical lattices and Cyclomatic-like polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 93-121
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Makoto Katori	4. 巻 60
2. 論文標題 Macdonald denominators for affine root systems, orthogonal theta functions, and elliptic determinantal point processes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 13301
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5037805	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuaki Hiraoka, Hiroyuki Ochiai and Tomoyuki Shirai	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Zeta functions of periodic cubical lattices and cyclotomic-like polynomials	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Makoto Katori	4. 巻 60
2. 論文標題 Macdonald denominators for affine root systems, orthogonal theta functions, and elliptic determinantal point processes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 013301/1-27
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5037805	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計25件 (うち招待講演 21件 / うち国際学会 19件)

1. 発表者名 Hideki Tanemura
2. 発表標題 On a model of evolution of subspecies
3. 学会等名 Boston-Keio-Tsinghua Workshop 2023 Probability and Statistics, Boston University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hideki Tanemura
2. 発表標題 Elephant random walk with a power law memory
3. 学会等名 The 21st Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interaction Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hideki Tanemura
2. 発表標題 Phase transition for a unidirectional elephant random walk with a power law memory,
3. 学会等名 無限粒子系、確率場の諸問題XVII
4. 発表年 2024年



1. 発表者名 Hideki Tanemura
2. 発表標題 Phase transition for a unidirectional elephant random walk with a power law memory
3. 学会等名 Interacting particle systems and SPDEs China-Japan Probability Workshop at BIMSA and YMSC (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Zeros of random power series with stationary Gaussian coefficients
3. 学会等名 French Japanese Conference on Probability and Interactions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Zeros of Gaussian power series with dependent coefficients
3. 学会等名 The 21st Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Makoto Katori
2. 発表標題 Non-Hermitian matrix-valued processes and the regularized Fuglede-Kadison determinant random-fields
3. 学会等名 Random Operators and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Makoto Katori
2. 発表標題 Elliptic extensions in statistical and stochastic systems
3. 学会等名 International Conference on Mathematical Methods in Physics (ICMMP23) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Makoto Katori
2. 発表標題 Eigenvalues, eigenvector-overlaps, and regularized Fuglede--Kadison determinant of the non-Hermitian matrix-valued Brownian motion
3. 学会等名 International Workshop `Random Matrices and Applications' (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Makoto Katori
2. 発表標題 Stochastic log-gases, multiple SLEs, and Gaussian free fields
3. 学会等名 New Trends of Conformal theory from probability to gravity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 白井朋之
2. 発表標題 Zeros of random analytic functions with dependent Gaussian coefficients
3. 学会等名 確率・統計・行列ワークショップ 彦根 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 白井朋之
2. 発表標題 アルファ行列式の正值性と点過程
3. 学会等名 統計数理研共同研究ISMCRP2001「固有値分布と行列式点過程に基づく統計モデル」, 統計数理研究所(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Makoto Katori
2. 発表標題 Orthogonal theta functions associated with affine root systems and determinantal point processes
3. 学会等名 CIRM Conference - Modern Analysis Related to Root Systems with Applications(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 香取眞理
2. 発表標題 円環上のガウス型解析関数とパーマメント・行列式点過程
3. 学会等名 東京確率論セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 香取眞理
2. 発表標題 Hyperuniformity of the determinantal point processes associated with the Heisenberg group
3. 学会等名 2021 RIMS共同研究研究会「量子場の数理とその周辺」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Duality of determinantal point processes
3. 学会等名 Workshop on "Random matrices, Determinantal point processes and Gaussian analytic functions"
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Limit theorems for determinantal point processes
3. 学会等名 International Conference on Mathematical Methods in Physics , Marrakesh, Morocco. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Limit theorems for determinantal point processes
3. 学会等名 A Probability Conference on Random Matrices and Related Topics, KIAS, Seoul, Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Limit theorems for persistence diagrams
3. 学会等名 Seminar at KTH Royal Institute of Technology, Sweden (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makoto Katori
2. 発表標題 Partial isometries, duality, and determinantal point processes
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2019, Sept.2-6, 2019, Fukuoka University, Japan (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makoto Katori
2. 発表標題 Partial Isometries, Duality, and Determinantal Point Processes
3. 学会等名 Workshop on Random Matrices, Stochastic Geometry and Related Topics (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Universality of determinantal point processes on Riemannian manifolds
3. 学会等名 RIMS Joint Research (Open): 17th International Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Limit theorems for determinantal point processes
3. 学会等名 エルゴード理論研究会(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hideki Tanemura
2. 発表標題 Systems of hard balls with long-range interactions
3. 学会等名 Workshop on Random Matrices, Stochastic Geometry and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoyuki Shirai
2. 発表標題 Dynamic determinantal point processes
3. 学会等名 Ajou-Kyushu joint workshop on Industrial Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Makoto Katori	4. 発行年 2023年
2. 出版社 SpringerBriefs in Mathematical Physics (BRIEFMAPHY, volume 47)	5. 総ページ数 125
3. 書名 Elliptic Extensions in Statistical and Stochastic Systems	

〔産業財産権〕

〔その他〕

<a href="https://imi.kyushu-u.ac.jp/~shirai/">https://imi.kyushu-u.ac.jp/~shirai/</a>
---

## 6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	種村 秀紀 (Tanemura Hideki)  (40217162)	慶應義塾大学・理工学部(矢上)・教授  (32612)	
研究分担者	香取 眞理 (Katori Makoto)  (60202016)	中央大学・理工学部・教授  (32641)	

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 Workshop on Probabilistic Methods in Statistical Mechanics of Random Media and Random Fields	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 International Conference on "Random matrices and their applications", (May. 21--25, 2018)	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Workshop on "Random matrices, stochastic geometry and related topics", NUS, Singapore. (Mar. 14th--16th, 2019)	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Workshop on Probabilistic Methods in Statistical Mechanics of Random Media and Random Fields	開催年 2023年～2023年

## 8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
シンガポール	シンガポール国立大学		