様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １９ 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2018～2022
課題番号：１８Ｈ０１１２９

研究課題名（和文）非線形分散型方程式のエネルギー集約と大域構造に関する研究

研究課題名（英文）Research on global analysis and concentration energy for nonlinear dispersive equations

研究代表者
高岡　秀夫（Takaoka, Hideo）

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：１０３２２７９４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　7,800,000円

研究成果の概要（和文）：非線形性による波動の集約性と分散性による波動の変調性とが生み出す波動現象を記述する非線形分散型方程式，特に非線形シュレディンガー方程式とKdV方程式について，大域解の存在，大域挙動に関する研究を行った．非線形シュレディンガー方程式については，微分型を代表とする非線形項を考え，相互作用における共鳴・非共鳴構造を考察し，解の集約性を特徴の成果により解の波数エネルギーが転換される現象を示した．KdV方程式については，双線形評価式による研究のもとに，KdV方程式の平滑効果，およびKdV方程式を2次元に拡張したZakharov-Kuznetsov方程式に対する大域可解性を示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
ハミルトニアンに対応したエネルギー保存空間は，ハミルトニアンが意味をもつ空間として意味があり，その関数空間における解の大域存在，大域挙動に関する研究は多い．また，弱解の一意存在性や正則性に関する解析では，方程式に対してスケール不変である関数空間が重要な役割を果たし，そのような関数空間はエネルギー保存量が有限とは限らない場合が多い．本研究の一つ目の問いは，初期値問題の適切性・非適切性を切り分ける臨界空間はどうかということである．二つ目の問いは，解の大域的な振る舞いをフーリエ空間における波動のエネルギー密度の転換過程で解析できないかということであった．本研究で得られた成果の価値は高いと言える．

研究成果の概要（英文）：I developed the global existence and large time behavior of solutions to nonlinear dispersive equations, especially the nonlinear Schrodinger equation and KdV equation, which describe the wave phenomena produced by the incorporation of nonlinear and dispersive effects. Regarding the nonlinear Schrodinger equation, I showed a phenomenon in which the wave energy of the solution is converted due to the concentration effect of the solutions due to the resonance/non-resonance in the interaction for nonlinear terms. Regarding the KdV equation, by considering the bilinear estimates, I showed the smoothing effect of the KdV equation and the global solvability of the Zakharov-Kuznetsov equation, which is a two-dimensional extension of the KdV equation.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：分散型方程式　初期値問題　適切性　大域挙動

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

非線形分散型方程式に対する初期値問題の適切性(解の一意存在,初期値に関する連続依存性)は基本的な問題であり，１９８０年代より適切性・非適切性を切り分ける臨界空間の研究が進展している．特に，１９９０年代に Bourgain の提唱したフーリエ制限ノルム法はエネルギー空間（運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの総和であり，微分階数が 1 のソボレフ空間空間の場合が多い)，さらにはエネルギー空間を広げた弱解の関数空間で適切性を取り扱うことに成功した．大域解の存在定理や挙動を研究する上で，研究代表者もフーリエ空間における波動のエネルギー転換過程から解の定性構造の解析を行った．また，Kenig-Merle の研究に見られるように，解のダイナミクス変化を特徴付ける最小解を変分法で解析する手法が開発され，エネルギー臨界型の方程式に対する問題に対して大きな影響を与えた．これらの研究に共通することとして，分散性と非線形性による解の非一様な特異性をどのように解析するかが鍵であった．しかしここでは，方程式固有の構造が要となることから，一般論での扱いは困難であった．このような研究の流れの中にあって，プラズマ中の電子音波を記述する，微分を非線形項に持つ非線形シュレディンガー方程式，あるいは浅水波を記述する KdV 方程式や膜液流上の長波長波動のモデルである Zakharov-Kuznetsov 方程式など，十分な研究がなされていなかった．解の空間無限遠での減衰が期待できない周期境界条件におけるなどに対して，初期値問題の適切性と非適切性とを切り分ける臨界空間がよく分かっておらず，その解明，および研究方法論の構築が期待されている．

２．研究の目的

非線形シュレディンガー方程式や KdV 方程式を始めとする非線形分散型方程式は，分散性による振動分散と非線形性による凝集という異なるタイプの性質が競合した方程式である．それらの競合により複雑な波動の変遷を形成する．数学的な見地から，このような複雑な変遷過程の解明を明らかにすることを目指す．特に，上記の非線形分散型方程式に対して，初期値問題の適切性・非適切性を切り分ける最良といえる関数空間で解のダイナミクスを解明することを目指す．解の正則性に関する解析が必要となるが，これは放物型方程式のような平滑効果が期待できないことに由来する．非線相互作用による解の正則性をどのように解析するか，その解析手法の構築を目指す．

方程式を不変にするスケール変換で不変なソボレフ空間は，初期値問題の適切性と非適切性とを切り分ける指標を与えるが異なる場合もある．典型的な問題として，微分を非線形項に含む非線形シュレディンガー方程式を考え，大域解の存在定理が成り立つ臨界空間は初期値の質量ノルムの大きさを指標として解析する．まずは大域解の存在が破綻について，臨界空間を質量ノルムで決定することを目指す．

KdV 方程式に対しては，周期境界条件を考えた場合，平滑化が期待できないことが障害となる．解の正則性に関する解析が必要となるが，それに関する研究としてフーリエ空間において非線形相互作用を解析した際に現れる共鳴・非共鳴周波数による特徴付けを行う．波動エネルギーの転換構造が初期値問題の適正性に及ぼす影響の解明を目指す．

Zakharov-Kuznetsov 方程式に対しては，全空間において空間遠方で減衰する波動構造についてはよく研究されている．一方，無限遠方で減衰しないような場合は研究が進んでいない．これについても，上記の KdV 方程式の場合と同様に平滑効果が期待されないことが解析する上で障害となる．特にここでは，空間２次元に対して一方向に周期境界条件を課した場合に，平滑効果が及ぼす解の大域的な正則性の解明を目指す．

３．研究の方法

微分を非線形項に含む非線形シュレディンガーの大域解の存在については，様々なエネルギーレベルにおける定在波解の安定性解析の研究と Kenig-Merle による解のダイナミクス変化を特徴付ける最小解に関する研究の統合を試みる．これにより，大域構造に対して，初期値の大きさに関する制限と設定とが生じる構造的な障害とは何かを突き詰め，大域適切性が成り立つ関数空間と解の大域構造を解析する．解の発散に関わる集約構造を統御する評価式，質量ノルムを記述する質量密度の発散過程を解析する必要があるが，まずは既存する評価式を実解析・調和解析的な研究手法を用いて精密化する．

KdV 方程式については，周期境界条件における解の平滑効果を可積分性の観点から解析し，適切性が整合する関数空間を明らかにする．非線形共鳴に由来する非正則性を評価する場合に，方程式からこれに対応する特異性をうまく抽出するゲージ変換，解の正則性をより正確に解析できる normal form 法，これらとフーリエ制限ノルム法との融合を考える．この問いへの取り掛かりとして，まずは線形解に関するストリッカーツ評価式の精密化を図る．非線形項を処理する際に現れる非線形相互作用の解析に適した双線形形式により精密な解析を図る．

Zakharov-Kuznetsov 方程式については，領域に対して一方向に周期境界条件を課した問題を設定し，解の大域可解性の観点から適切性が成り立つ関数空間を解析する．研究代表者らにより開発された I-method を用いることにより，エネルギー空間よりも弱い関数空間で大域適切性を

示すことが可能である.しかし,周期境界条件により解の減衰と分散が十分に期待できないので,これに関して精密な解析が必要になる.非線形シュレディンガー方程式で有効であった波数空間における角度正則性の解析,および双線形評価により,解の平滑化に置き換わる効果を導く方法を用いる.

また,研究目的を達成する上で,所属機関において分野横断型のセミナー「解析セミナー」を開催する.また,分散型方程式の研究分野に絞った研究集会を開催する.国内外から講演者を招聘して,多くの研究者と議論することから,関係する情報を収集するとともに,研究方法の妥当性を適切に確認し,必要に応じて研究方法を修正と改善を行う.

４．研究成果

（1）空間１次元の周期境界条件,質量臨界冪の非線形項をもつ非線形シュレディンガー方程式に対して,非線形相互作用によって引き起こされる波動エネルギーの集約とエネルギー転換の関係性を示した.空間２次元の場合,対応する質量臨界冪の非線形項に対しては先行する結果があった.しかし空間１次元のモデルに対しては十分な研究がなかった.

今回の１次元モデルに対しては,エネルギー転換を特徴付ける非線形共鳴に対応する有限次元近似モデルを構成し,有限波数モード間においてエネルギーが転換される構造を示した.有限次元モデルの解と非線形シュレディンガー方程式の解との差異については,近似評価式を構成することで解析した.有限次元モデルと本来の方程式との誤差評価の収束オーダーについては,解の振幅パラメータを導入し,その大きさを用いてエネルギー転換を定量的に解析した.ここで,解析を実行できる時間は振幅パラメータで与えた.

（2）微分を非線形項に持つ非線形シュレディンガー方程式の初期値問題について,時間大域構造を研究した.完全可積分系の方程式であり逆散乱法による解の構成が可能である一方,解の大域性について,その適切性が成り立つ臨界空間が確定されておらず,解の発散現象を含めてよく分かっていなかった.初期値の質量ノルムが多項式ソリトン解よりも真に小さい場合,エネルギー保存量が正値となり,エネルギー保存則から得られる解のアプリオリ評価式から大域解の存在が得られる.他方,多項式ソリトン解と同じ,あるいは大きい質量を持つ場合に初期値問題が大域適切であるか分かっていなかった.既存の研究成果としては,微分を非線形項に含まない冪乗型の非線形シュレディンガー方程式の場合とは対照的であり,大域適切性が大きな初期値に対して成立するか,その解決が望まれていた.

まずは,初期値の全質量を多項式ソリトン解のそれと同じ場合に問題を制限し,初期値問題の解が時間大域的であるか,つまり多項式ソリトン解の質量値が大域適切性に対する閾値であるかどうかという問題について研究した.Kenig-Merle らによって開発された concentration compactness の方法を用いることにより,背理法による証明方法から,有限時刻で発散するならば,発散時刻に近づくにつれ解は多項式ソリトン解に時空スケール変換を施し凝集した関数に漸近することを得た.多項式ソリトン解に対しては,方程式のエネルギー量,モーメント量,他幾つかの保存量の値がゼロ値であることを確認し,発散する解に対しては,関数のプロファイル分解を用いてこれら保存量も多項式ソリトン解と同じゼロ値に収束する状況を証明した.

（3）周期境界条件における KdV 方程式に対して,その基本解の与える線形作用素の正則性を研究した.特に時空可積分性に現れるルベーグ指数について,その臨界値を解明することを目的とした.全空間の問題と異なり,周期境界条件では空間無限遠における解の減衰がなく,滑らかさに関する特異性の分散は期待できない.そこで,線形評価式であるストリッカーツ評価式を非線形評価の際に有効な双線形形式へ書き換え,積分可能な特異性の解析をルベーグ可積分性とルベーグ指数に対する臨界値の側面から研究した.

KdV 方程式の基本解に対しては,波数モードが異なる２つの初期値を与え,それらの相互作用を双線形形式で研究した.異なる波数モードの相互作用ではある種の平滑化効果を得た.これは通常の線形評価式ではみられない分散効果である.次に,ここで得られた双線形評価を一般化 KdV 方程式の大域適切性の問題に適用した.エネルギー空間よりも微分階数の高い高階ソボレフ空間における大域解に対し,解のアプリオリ評価式を研究した.上記双線形評価式を非線形項の評価に用い,これと反転型 I-method による議論とを融合することにより,時間変数に対する解の多項式増大評価を得た.

（4）空間２次元において,３次の質量臨界冪の非線形項をもつ非線形シュレディンガー方程式を無限円柱領域において考え,高階ソボレフ空間における解のアプリオリ評価を与えた.高階ソボレフノルム評価は,波動エネルギーレベルが低周波層から高周波層へ移行することを制御することにおいても重要である.空間無限遠での減衰が期待できる全空間における問題については先行結果があった.ここでは空間の一方向に対して有限である場合の波動現象を考えた.

非線形項の評価では,波数空間における角度正則性の見地から双線形評価を構成した.得られた双線形評価式では,無限円柱領域におけるルベーグ積分性と滑らかさによる正則性に対する平滑効果を解析した.

（5）上記と同様な無限円柱領域において,Zakharov-Kuznetsov 方程式の大域適切性の問題を考察した.エネルギー空間における時間大域適切性については,Molinet-Pilod らの先行結果があった.ここでは微分階数がエネルギー空間のそれよりも弱い初期値のクラス,つまり関数空間としてはエネルギー空間よりも広いソボレフ空間において大域適切性と大域評価を研究した.

I-method による擬エネルギー量を定義し,Zakharov-Kuznetsov 方程式の空間異方性を甘味し

た新しいタイプの双線形評価式を証明した. これにより, 波数空間におけるエネルギー転換構造を大域的に解析することに成功した. ソボレフ指数が 29/31 よりも真に大きい条件のもと, 初期値問題の適切性が時間大域的であることを得た.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

1．著者名 Takaoka Hideo	4．巻 291
2．論文標題 Remarks on blow-up criteria for the derivative nonlinear Schr?dinger equation under the optimal threshold setting	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Journal of Differential Equations	6．最初と最後の頁 90～109
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2021.05.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Hideo Takaoka	4．巻 2093
2．論文標題 Energy transfer model and large periodic boundary value problem for the quintic NLS	5．発行年 2018年
3．雑誌名 数理解析研究所講究録	6．最初と最後の頁 94～103
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Osawa Satoshi、Takaoka Hideo	4．巻 2024
2．論文標題 Global well-posedness for Cauchy problems of Zakharov-Kuznetsov equations on cylindrical spaces	5．発行年 2024年
3．雑誌名 Electronic Journal of Differential Equations	6．最初と最後の頁 05～05
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.58997/ejde.2024.05	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Takaoka Hideo	4．巻 394
2．論文標題 On the growth of Sobolev norm for the cubic NLS on two dimensional product space	5．発行年 2024年
3．雑誌名 Journal of Differential Equations	6．最初と最後の頁 296～319
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2024.03.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Takaoka Hideo	４．巻 -
２．論文標題 Bilinear Strichartz estimates for the KdV equation on the torus	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　5件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 Hideo Takaoka
２．発表標題 Bilinear Strichartz estimates for the KdV equation
３．学会等名 Mathematical Analysis of Nonlinear Dispersive and Wave Equations（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 Hideo Takaoka
２．発表標題 Bilinear Strichartz estimates for dispersive equations on the torus
３．学会等名 Geometric Analysis in Harmonic Analysis and PDE（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 高岡秀夫
２．発表標題 Energy cascades for resonant nonlinear Schrodinger equations
３．学会等名 神楽坂解析セミナー（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Hideo Takaoka
２．発表標題 Energy cascades for resonant nonlinear Schrodinger equations
３．学会等名 Nonlinear Dispersive Equations in Kumamoto, 2019（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Hideo Takaoka
２．発表標題 Energy cascades for resonant nonlinear Schrodinger equations
３．学会等名 九州関数方程式セミナー（招待講演）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

高岡研究室のホームページ http://www2.kobe-u.ac.jp/~takaoka/index.html

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計2件

国際研究集会	開催年
調和解析と非線型偏微分方程式	2019年～2019年
Harmonic Analysis and Partial Differential Equations	2018年～2018年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関