

令和 6 年 5 月 2 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01130

研究課題名（和文）タウ函数の特異極限における新しいソリトン方程式系とその応用

研究課題名（英文）Singular limit of tau function for soliton equations and its application

研究代表者

太田 泰広（Ohta, Yasuhiro）

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：10213745

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 12,100,000円

研究成果の概要（和文）：非線形可積分発展方程式系においては、ある種の特異性のある極限をとることによって、新しい構造をもった方程式や解の系列が導出されることがある。本研究では、このような極限において現れる具体的な解を、可積分系の理論における双線形化法に基づいて構成する方法を与え、様々な方程式系の代数構造を明らかにするとともに、それらに対する特徴的な挙動を示す解の解析的性質について研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

古典可積分系のKP系列の理論においては、広いクラスの方程式系を構成、分類して、その解空間の代数構造を明らかにすることは、理論応用両面において重要である。本研究では、連続系離散系の両者を対象として、局在構造や特異点構造などの新しい構造をもつ解を具体的に構成することによって、ある種の特異性のある極限をとることによって初めて現れる方程式系およびその解に関する研究を進展させた。

研究成果の概要（英文）：In nonlinear integrable evolution equations, it is possible to derive new system of equations and their solutions by taking a kind of singular limit. Based on the bilinear method in the theory of integrable systems, the way to construct solutions in the limit is proposed, and the algebraic structure of the systems and the analytic properties of the solutions are investigated.

研究分野：理学

キーワード：函数方程式論

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) KP 理論においては、ソリトン方程式の系列は普遍グラスマン多様体上の無限次元力学系として特徴づけられ、そのプリュッカー座標からタウ函数が定義される。この力学系は無限次元の対称性と無限個の保存量をもつため、解の時間発展には強い制約条件が課されることになり、ソリトン同士の衝突において各ソリトンは変形せずに伝搬する安定な孤立波となる。

(2) 特異極限は、従来の KP 系列の様々な部分系列に対して適用可能であるため、非常に豊富なソリトン方程式系を導出することができる。しかし、これまでの研究の多くは一般の KP 系列を研究対象としており、特異極限においてのみ出現する方程式系およびその解は体系的に研究されてこなかった。

2. 研究の目的

(1) KP 系列のソリトン方程式系の時間発展は、無限次元の対称性によって定められるため、ソリトンの伝搬や弾性的な相互作用を記述するには有効であったが、ソリトンの分裂や融合などの、多くの物理系において重要となる現象を記述することはできなかった。

(2) 本研究の目的は、従来の KP 理論では扱われてこなかったタウ函数の特異極限を考え、新しいソリトン方程式の系列を構成しその分類を与えることによって、ソリトンの分裂融合現象などを記述できるように KP 系列の理論を拡張することである。さらに、これらの新しい挙動を示す解の性質を解析し、様々な物理系に対して応用することを目標とする。

3. 研究の方法

(1) 一般のヤング図形に付随する表現を考えることにより、ソリトン方程式は擬簡約と呼ばれる任意定数を含む形に拡張される。擬簡約のもとでベックランド変換の発散条件を課すことによって、自由度の高いソリトン方程式系を構成し、そのタウ函数解の代数的構造を研究する。

(2) 解空間の対称性は、特異極限における方程式系と通常の KP 系列の間で一対一に対応しない。特異極限の各系列に対して、具体的なソリトン解の代数構造および頂点作用素から決まる変換群から、解空間の対称性を明らかにする。

(3) 直接法を用いて、ソリトンの分裂融合や生成消滅を記述する解を具体的に構成し、それらの漸近挙動や相互作用の挙動を解析する。変調不安定な流体力学系における波動の励起と分散などを、特異極限におけるソリトン解を用いて記述する。

4. 研究成果

(1) 微分型 Yajima-Oikawa 方程式は、水面波等の波動現象において長波短波相互作用を記述する発展方程式であり、可積分系の構造をもつことが知られている。この方程式系に対する解空間の代数的構造について、非線形可積分系における直接法による解析を行った。その結果、微分型非線形 Schroedinger 方程式と同様に、微分型 Yajima-Oikawa 方程式は 3 種類の型に分類されることが明らかになった。特に、短波成分が暗いソリトン解を与える場合には、ソリトン振幅が搬送波振幅を越える反暗型ソリトン解が存在することを示した。離散および超離散系において、ソリトン解における位相パラメーターが時間周期的に変動するような、新しい拡張されたソリトン解を構成するとともに、このような周期位相ソリトン解を許容する新しい型のソリトン方程式系を提出した。これらの方程式は、離散系においては離散 DKP 方程式階層に特殊な簡約を施すことによって得られ、超離散系においては離散方程式に超離散化を適用することによって得られる。周期位相ソリトンは簡約条件に従って内部自由度をもち、時間とともに周期的に形を変えながら伝搬する。特に超離散系の方程式は、特別な場合には超離散 hungry Lotka-Volterra 方程式に帰着される。二次元非圧縮完全流体の定常流を記述する Liouville 方程式に対して、渦度分布が特異点をもつ場合について解を構成する方法を定式化し、連続的な渦度分布と渦系系が共存するような定常流の厳密解を構成した。さらに二次元 Liouville 方程式の可積分な離散化について考察した。

(2) 従法線流によって変形する空間曲線は、局所誘導近似のもとでの三次元渦系の運動を記述しており、曲線の複素曲率が非線形 Schroedinger 方程式に従う。可積分性を保存するように空間曲線およびその変形を離散化することにより、離散非線形 Schroedinger 方程式によって記述される離散空間曲線の変形を定式化した。半離散と全離散の非線形 Schroedinger 方程式に対応して、離散曲線の連続的変形と離散的変形の両方を与えた。連続、離散のそれぞれの場合に対して、二成分 KP 系列のタウ函数を用いることによって空間曲線の解の明示公式を導出した。局所誘導方程式の離散類似が構成され、複素曲率は連続時間または離散時間の離散非線形 Schroedinger 方程式に従うことが示された。無限遠方で直

線に漸近する空間曲線および周期境界条件に対応する閉曲線の場合に対して、構成された離散可積分発展方程式に基づいて数値シミュレーションを行い、安定高精度に曲線の運動が記述できることが示された。曲線の座標および Frenet 枠などの関連する変数をタウ函数を用いて明示的に表示することができたので、曲線の形状および時間的変形を記述する Lax 方程式は二成分 KP 系列のタウ函数に関する双線形方程式に帰着され、ソリトン理論の直接法を用いてそれらの方程式に対する行列式解が与えられた。連続、半離散、全離散の非線形 Schroedinger 方程式のそれぞれの場合の明るいソリトン解に対応して、連続および離散空間曲線の変形を記述する解が構成された。

- (3) 自己適合移動格子スキームとは、特異性のある解を持つ可積分な非線形波動方程式に対して解構造を保つ離散化を行うことで得られた格子間隔が自動的に調節される構造保存型差分スキームである。非零境界条件や周期境界条件など一般的な境界条件での自己適合移動格子スキームについて考察した。一般的な境界条件での自己適合移動格子スキームを考える上での鍵はホドグラフ変換の積分表示の始点（境界点）とホドグラフ変換との整合性を考慮することにある。これによって、どのような境界条件下でも境界点を含むすべての格子点の動きを計算することが可能となった。自己適合移動格子スキームを用いた一般的な境界条件での数値計算例を示した。Liouville 方程式は最も基本的な $1+1$ 次元非線形可積分発展方程式系の一つであり、長さが最小の戸田分子方程式から変数変換によって得られる。楕円型の場合には、Liouville 方程式は二次元非圧縮完全流体の定常流を記述しており、可積分系の解が流体運動の厳密解を与える点で興味深い。Liouville 方程式の正則解は非圧縮完全流体の二次元定常流を記述しているが、解が特異点をもつ場合には必ずしも定常流を表すとは限らない。過度分布が特異点をもつ場合について解を構成する方法を定式化し、連続的な過度分布と渦系が共存するような定常流の厳密解を構成した。Liouville 方程式に対しては、任意関数を含む形で一般解の表示が知られている。非正則解が定常流を与えるための条件を、それらの任意関数に対して書き下すことにより、定常流を表す非正則解の構成が容易になった。
- (4) 非線形シュレーディンガー方程式の空間時間の両方が離散化された、可積分全離散非線形シュレーディンガー方程式に対して、時間的空間的に局在した構造をもつ rogue 波解を構成した。まず、KP-Toda 簡約の方法を用いて、離散二次元戸田格子方程式階層の双線形方程式系から離散非線形シュレーディンガー方程式に対する一般的なブリーザー解を構成した。次に、多ブリーザー解に含まれるパラメーターに対して技巧的な極限操作を逐次的にとることによって、離散非線形シュレーディンガー方程式の一般的な高次 rogue 波解を導出した。これは空間時間の両方が離散化された全離散可積分系に対する、高次 rogue 波解の最初の例となっている。タウ函数は、シュア函数を成分とするテプリッツ行列と、位相パラメーターを含む枠によって、対角行列を挟んだ行列の行列式を用いて表される。複数の rogue 波の相互作用を解析するために、非線形シュレーディンガー方程式とブシネ方程式の結合系を考え、rogue 波として許容される波数が複数存在することを用いて、二種類の rogue 波が共存する解を構成した。二つの rogue 波の時空間における距離を制御することによって、rogue 波の振幅が相互作用によって増幅される場合と、rogue 波同士が反発的な相互作用をする場合があることが明らかになった。一般的な高次の多 rogue 波解のタウ函数はブロック行列式によって表され、rogue 波の最大数は簡約条件によって定まることが分かった。
- (5) 二成分ハンター・サクストン方程式において、補助的なタウ函数を導入することによって二つのベックランド変換型の双線形方程式に分離して双線形化する方法を与えた。連立系の解を構成してその離散類似を考えることによって、この定式化に基づく双線形方程式の半離散化を行った。非線形シュレーディンガー方程式における多 Akhmediev ブリーザー解を実波数パラメーターで径数付けしてからパラメーター微分をとることによって、一般的な rogue 波解の導出が容易になることを示した。この導出において、冪乗を階乗で置きかえた階乗型二項定理を用いることによって、rogue 波解のタウ函数に対するロンスキー型グラム行列式を用いた新しい明示公式を得た。タウ函数の行列式表示の各成分は、シュア多項式を係数とする指数因子の線形結合で与えられ、一般に Akhmediev ブリーザーの縮退を表現している。トロイダルリー代数対称性に付随した非線形可積分系に対して、任意多数個の任意函数を成分に含むグラム型行列式解を構成した。アフィンリー代数対称性によって分散関係が決定される場合に比べて、時間発展を記述する函数の自由度が高いため、極めて広いクラスの解が簡潔かつ明示的に与えられることが明らかになった。解に含まれる成分函数を適当な多項式函数に取ることによって、従来の非線形シュレーディンガー方程式などにおける rogue 波解と類似の構造を持つ局在波動を表す解が得られることを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yasuhiro Ohta and Bao-Feng Feng	4. 巻 439
2. 論文標題 General rogue wave solution to the discrete nonlinear Schrödinger equation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Phys. D	6. 最初と最後の頁 133400
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.physd.2022.133400	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 S. Hirose, J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta	4. 巻 3
2. 論文標題 Discrete local induction equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Integrable Syst.	6. 最初と最後の頁 xyz003
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 H. Park, J. Inoguchi, K. Kajiwara, K. Maruno, N. Matsuura and Y. Ohta	4. 巻 16
2. 論文標題 Isoperimetric deformations of curves on the Minkowski plane	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.	6. 最初と最後の頁 1950100
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 J. Chen, B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta	4. 巻 141
2. 論文標題 The derivative Yajima-Oikawa system: bright, dark soliton and breather solutions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Stud. Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 145-185
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Nagai, Y. Ohta and R. Hirota	4. 巻 88
2. 論文標題 Discrete and ultradiscrete periodic phase soliton equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Phys. Soc. Jpn.	6. 最初と最後の頁 34001
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Y. Ohta
2. 発表標題 Interaction of rogue waves
3. 学会等名 International Workshop on Rogue Waves (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 丸野健一, 太田泰広
2. 発表標題 一般的な境界条件での自己適合移動格子スキームと数値計算
3. 学会等名 日本物理学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Y. Ohta
2. 発表標題 Discretization of the Liouville equation of elliptic type
3. 学会等名 The 2nd JNMP Conference on Nonlinear Mathematical Physics: 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Y. Ohta
2. 発表標題 Dark soliton solutions for toroidal type soliton equations
3. 学会等名 ISLAND V: Integrable systems, special functions and combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Y. Ohta
2. 発表標題 An expression of lambda determinant derived from Toda lattice equation
3. 学会等名 The 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Y. Ohta
2. 発表標題 Periodic phase solitons for discrete and ultradiscrete equations
3. 学会等名 Scientific Gathering, Integrable systems and beyond (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Y. Ohta
2. 発表標題 Two dimensional stationary vorticity distribution and integrable system
3. 学会等名 The Eleventh IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	山田 泰彦 (Yamada Yasuhiko) (00202383)	神戸大学・理学研究科・教授 (14501)	
研究 分担者	野海 正俊 (Noumi Masatoshi) (80164672)	立教大学・理学研究科・特任教授 (32686)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------