

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：34504

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01134

研究課題名（和文）離散幾何的な新概念とグレブナー基底理論の融合による凸多面体論における新手法の開発

研究課題名（英文）Development of new methods in the theory of convex polytopes by combining new concepts of discrete geometry and the theory of Groebner bases

研究代表者

大杉 英史（Ohsugi, Hidefumi）

関西学院大学・理学部・教授

研究者番号：80350289

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 12,400,000円

研究成果の概要（和文）：当該研究課題では、離散幾何的手法と、トーリックイデアルのグレブナー基底の理論を融合させるという斬新な計画を遂行し、整凸多面体にまつわる未解決問題に挑むと同時に新手法の開発を推進することを目的とした。研究成果として特に、単位単体のミンコフスキ和が正規性を持つことを証明し、著名な予想である小田予想がnestohedronと呼ばれるクラスについて正しいことを証明した。また、整凸多面体の多項式の γ -非負性について研究し、グレブナー基底の理論などを活用することによって、いくつかの重要な整凸多面体について、 γ -非負性を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Nestohedronと呼ばれる、整凸多面体の重要かつ広いクラスについて、小田忠雄氏による著名な未解決予想「非特異多面体は正規」を、グレブナー基底の理論を用いて鮮やかに証明することができた。小田予想の肯定的な解決に向けて、今回の手法を拡張したさらなる新手法の開発が期待される。また、整凸多面体の多項式の γ -非負性の研究については超グラフの内部多項式などとの思わぬ結び付きを見出しており、関連する分野の研究者から大きな反響があった。これらの研究成果は、離散幾何的手法と、トーリックイデアルのグレブナー基底などの代数的理論を融合した手法のさらなる発展に寄与するものである。

研究成果の概要（英文）：In this project, we tried to combine discrete geometric methods and the theory of Groebner bases of toric ideals, and to study unsolved problems related to integral convex polytopes and to promote the development of new methods at the same time. In particular, we proved that the Minkowski sum of unit simplices is normal, and hence famous “Oda conjecture” is correct for nestohedra. We also studied the γ -positivity of the δ -polynomials of integral convex polytopes and proved the γ -positivity of some important integral convex polytopes by using the theory of Groebner bases.

研究分野：計算可換代数，計算幾何，組合せ論

キーワード：グレブナー基底 凸多面体 トーリックイデアル

1. 研究開始当初の背景

Stanley による Cohen-Macaulay 環理論を駆使した上限予想の肯定的解決等を契機として、凸多面体の組合せ論と可換代数は相互に影響を及ぼし合いながら発展を続けている。研究代表者自身もトーリックイデアルのグレブナー基底などの可換代数的手法と三角形分割などの組合せ論を駆使して、正規多面体の分類や、反射的多面体の構成などに関して顕著な成果を挙げてきた。凸多面体の組合せ論において、膨らませた凸多面体内の格子点の数によって定義される「エルハート多項式」は最も重要な研究対象の1つである。特に、その母関数の有理式表示における分子の多項式の係数である δ 列の unimodal 性 (単調増加した後、単調減少) や対称性は Gorenstein 環などの可換代数とも結び付き、活発な研究が継続されている。近年、spanning 多面体や interlacing 多項式などの画期的な新概念が発明され、 δ 列の unimodal 性に関して重要な成果をもたらしている。

2. 研究の目的

当該研究課題では、近年開発された spanning 多面体や interlacing 多項式といった革新的な離散幾何的手法と、トーリックイデアルのグレブナー基底の理論を融合させるという斬新な計画を遂行し、整凸多面体にまつわる未解決問題に挑むと同時に新手法の開発を推進することを目的とした。具体的な課題は主に以下の2点である。

(1) unimodal 予想. 任意の正規多面体の δ 列は unimodal である。

整凸多面体 P を k 倍に膨らませた多面体 kP 内の任意の格子点が P 内の k 個の格子点の和で表せるとき、 P は正規であるという。整凸多面体のエルハート多項式の母関数であるエルハート級数 (常に有理式となる) の分子の多項式の係数は δ 列と呼ばれ、一般に δ 列は非負整数列となる。例えばミラー対称性の文脈で重要な反射的多面体とは、 δ 列が対称な多面体のことである。反射的多面体が正則単模三角形分割を持つ (したがって正規である) 場合には δ 列は unimodal であることが知られているが、この結果を一般の正規多面体に拡張することを目的とする。

(2) 小田予想. 任意の非特異多面体は正規である。

次元 d の整凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ の任意の頂点について、頂点から辺に沿って伸びる整数ベクトルが \mathbb{Z}^d の Z 基底をなすとき、 P は非特異であるという。当該研究では、小田忠雄氏による著名な未解決予想「非特異多面体は正規」に挑戦する。なお、これは非特異トーリック多様体の任意の射影埋め込みが射影的正規であるという主張と同値であり、代数幾何においても非常に重要である。

3. 研究の方法

まず、準備段階として、著名な多面体のクラスについて具象的基礎研究を遂行するとともに、正規多面体、非特異多面体の新しい豊富なクラスの発見に努める。さらに、これらの研究成果をもとに、理論的な考察に加えて、計算機支援によって豊富なクラスによる実証を遂行し、interlacing 多項式や spanning 多面体などの最新の理論を、グレブナー基底を始めとする可換代数的手法と融合し、未解決問題への挑戦の過程で関連する理論の発展を目指す。

(1) 正規多面体の δ 列の unimodal 性

整凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ が spanning であるとは、 P 内の格子点 $P \cap \mathbb{Z}^d$ のアフィン結合全体が \mathbb{Z}^d と一致するときをいう。既存の研究により、spanning 多面体の δ 列 $(\delta_1, \dots, \delta_d)$ には隙間がない ($\delta_i = 0 \Rightarrow \delta_{i+1} = 0$) ことが証明されている。正規多面体、非特異多面体は spanning であり、unimodal な δ 列には隙間がないことから、unimodal 予想の解決に向けて大きな貢献が期待される新概念である。また、spanning 多面体の定義条件はトーリックイデアル理論の観点から極めて自然な条件であることから、グレブナー基底に関してこの概念を取り入れた技術の開発を行う。他方、 P の δ 列を係数にもつ δ 多項式 $\delta_P(x)$ に関して「 $\delta_P(x)$ は実根しか持たない $\Rightarrow \delta$ 列は unimodal」が成立するが、interlacing 多項式は $\delta_P(x)$ が実根しか持たない場合にそれを証明するための革新的な新概念である。研究代表者は $\delta_P(x)$ の根について、トーリックイデアルの理論を活用して極めて重要な例を構成した実績があり、interlacing 多項式の技術とトーリックイデアルの理論を組み合わせた独自の理論を展開することが可能である。

(2) 小田予想への挑戦

Hopf 空間のホモトピー結合性の記述に用いられることで知られる associahedron をクラスとして含み、非特異多面体の著名なクラスである graph associahedron、および、一般化された associahedron に関する具象的基礎研究を遂行する。グラフがパスの場合は、graph associahedron は通常の associahedron と一致し、研究代表者が提唱した Segre-Veronese 配置の理論が適用できる。そのため、一般のグラフの graph associahedron には、Segre-Veronese 配置の一般化として発明した入れ子配置の理論が威力を発揮する。さらに、有限グラフの辺凸多面体の正規性を単模被覆の構成によって証明した手法も検討し、2つの手法の融合・連携を図る。

これらの成果をもとに、非特異多面体のより広いクラスである nestohedron を標的として予想に挑み、さらなる一般化を目指す。

4. 研究成果

【主たる研究成果】

(1) Nestohedron に対する小田予想および Bogvad 予想の解決

単位単体のミンコフスキ和のトーリックイデアルについて研究し、スクエアフリーなイニシャルイデアルを持ち、2次生成であることを証明した。また、単位単体のミンコフスキ和が正規性を持つことを証明した。これらの結果により、著名な予想である小田予想と Bogvad 予想が nestohedron と呼ばれるクラスについて正しいことが証明された。(Higashitani-Ohsugi, Algebraic Combinatorics (2020))

(2) グレブナー基底理論を用いた正規反射的多面体の構成

順序凸多面体と安定集合凸多面体のケーリー和とその正規性および Gorenstein 性について研究成果を得た。主たる結果として、任意の半順序集合 P とグラフ G に対して以下の 3 条件が同値であることを証明することができた。

- G は理想グラフである。
 - P の順序凸多面体と G の安定集合凸多面体のミンコフスキ和は Gorenstein である。
 - P の順序凸多面体と G の安定集合凸多面体のケーリー和は Gorenstein である。
- この定理の証明においては、グレブナー基底理論が大きな役割を果たしている。(Hibi-Ohsugi-Tsuchiya, Michigan Math. J. (2020))

(3) 整凸多面体の δ 多項式の γ -非負性

係数が左右対称な正整数係数多項式 $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_s t^s$ が γ -非負であるとは、非負の γ_i たちを用いて、 $f(t) = \sum_{i \geq 0} \gamma_i t^i (1+t)^{s-2i}$ と表せるときにいう。 γ -非負は unimodal であるための十分条件であり、実根しか持たないかどうかの判定にも有用である。

- ① 整凸多面体の δ 多項式の γ -非負性について研究を行った。特に、二部グラフに付随するある反射的凸多面体の δ 多項式の γ 多項式が超グラフの内部多項式によって記述でき、 γ -非負であることを示すことができた。さらに、この整凸多面体の δ 多項式は虚根を持つ場合があり、貴重な例を生み出すことも判明した。(Ohsugi-Tsuchiya, Selecta Math. N.S. (2020)) また、enriched 順序凸多面体・enriched 鎖凸多面体を定義し、それらが反射的凸多面体であることを示すと同時に、 δ 多項式の γ 多項式を半順序集合の言葉で記述することによって、 γ -非負であることを証明した。(Ohsugi-Tsuchiya, European J. Mathematics (2021))
- ② 局所的アンチブロッキング凸多面体の δ 多項式が、付随する unconditional 凸多面体の δ 多項式たちの平均となっていることを示し、enriched 鎖凸多面体の結果を用いることで、twinned 鎖凸多面体の δ 多項式が γ -非負であることの証明に成功した。また A 型対称的辺凸多面体に関してこの手法を応用し、広いグラフのクラスに対して、その δ 多項式の γ -非負性を示した。(Ohsugi-Tsuchiya, Discrete Comput. Geom. (2021))
- ③ カクタスグラフのサスペンショングラフに付随する A 型対称的辺凸多面体について研究し、その δ 多項式を、マッチング生成多項式を用いて表すことに成功した。また、化学グラフ理論を応用することによって、このような多項式の根がすべて実根であることを証明した。(Ohsugi-Tsuchiya, Combinatorial Theory (2021))
- ④ 有限グラフに付随する PQ 型隣接凸多面体と呼ばれる格子多面体について、ジョイングラフを考えた場合の、PQ 型隣接凸多面体の δ 多項式に関する公式を与えた。この公式を応用し、車輪グラフの PQ 型隣接凸多面体の正規化体積の明示的な公式を与えることにも成功し、Chen-Davis の予想を肯定的に解決した。また、完全多部グラフについても δ 多項式や正規化体積の公式を与え、Chen-Davis の完全 2 部グラフ $K_{2,m}$ に関する結果を大幅に拡張することができた。(Ohsugi-Tsuchiya, Discrete Comput. Geom. (2022))

(4) 有限グラフに付随する安定集合イデアルの 2 次生成性

安定集合多面体は最適化理論などの多様な分野に現れる重要な多面体であり、トーリックイデアルの生成系、グレブナー基底を活用した分析が期待されている。本研究課題では、2次生成となるための条件について研究した。柴田和樹氏、土谷昭善氏との共同研究の中で「2次生成となることと、グラフが perfectly contractile であることは同値」という予想を提示し、重要なクラスについて証明している (Shitaba-Ohsugi-Tsuchiya, Bulletin of the London Math. Society (2022)) が、さらに、土谷氏との共同研究により、安定集合イデアルの 2 次生成性をケンペ同値と呼ばれるグラフ理論の彩色理論において重要な概念によって特徴付けることに成功した。また、応用として、弱弦グラフなどの重要なクラスについて 2 次生成性を証明するとともに、perfectly contractile の特徴付けに関する予想「Everett-Reed 予想」が正しければ、上記の予想も正しいことを証明した。(Ohsugi-Tsuchiya, arXiv:2303.12824 (2023))

(5) Nef 分割の豊富な例を構成

グレブナー基底理論を駆使して、単模配置から nef 分割の豊富な例を構成することに成功した。(Ohsugi-Tsuchiya, Mathematische Nachrichten (2020))

(6) マッチングフィールドのトーリックイデアル

s-ブロック対角マッチングフィールドのトーリックイデアルについて研究した。s=2 の場合に関する Clarke-Mohammadi の結果を一般化し、ある条件をみたす s-ブロック対角マッチングフィールドのトーリックイデアルが、2 次式からなるグレブナー基底を持つことを証明した。また、この結果を用いて、グラスマン多様体のトーリック退化の新しい族を生み出すことに成功した。(Higashitani, J. Pure and Applied Algebra (2022))

(7) q-linear resolution を持つエッジ環の特徴付け

日比・土谷・松田予想「 q が 3 以上の場合に、エッジ環が q-linear resolution を持つことと超曲面であることは同値」を肯定的に解決し、そのような性質を持つグラフを特徴付けることに成功した。証明においては、 δ 多項式の次数に関する考察が大きな役割を果たしている。(Mori-Ohsugi-Tsuchiya, J. Algebra (2022))

(8) シュペヒトイデアルのグレブナー基底

自然数の分割に付随するシュペヒトイデアルと呼ばれるイデアルについて研究した。

- ① シュペヒトイデアルに関する Haiman-Woo の結果 (シュペヒトイデアルの被約性、および、普遍グレブナー基底の構成) の簡潔な別証明を与えた。(Murai-Ohsugi-Yanagawa, Communications in Algebra (2022))
- ② シュペヒトイデアルのステイト多面体が一般化された permutohedron であることを証明した。この結果によって特に、与えられたシュペヒトイデアルが持つイニシャルイデアルの個数を、分割の大きさ n と、連続する成分の差の最小値 k を用いた式 $n!/(k+1)!$ で表すことができた。(Ohsugi-Yanagawa, arXiv:2201.05325 (2022))

【得られた研究成果のインパクトおよび今後の展望】

研究成果「(1) Nestohedron に対する小田予想および Bogvad 予想の解決」は研究計画調書であげた最終目標の 1 つであったが、グレブナー基底の理論を用いて鮮やかに証明することができた。小田予想の肯定的な解決に向けて、今回の手法を拡張したさらなる新手法の開発が期待される。また、研究成果「(3) 整凸多面体の δ 多項式の γ -非負性」は超グラフの内部多項式などとの思わぬ結び付きを見出しており、関連する分野の研究者から大きな反響があった。特に、当該研究課題の研究成果を礎として、対称的辺凸多面体の δ 多項式に関する研究が大勢の研究者を巻き込んで飛躍的な進展を見せている。今後は、これらの研究成果をもとに、離散幾何的手法と、トーリックイデアルのグレブナー基底などの代数的理論を融合した、さらなる新手法の開発が期待される。

【国際会議】

2019 年度には、研究遂行に向けての情報収集を目的とし、計算可換代数と凸多面体研究についての現状把握を行うため、欧米諸国の研究者を招待して、国際会議「Commutative Algebra and Lattice Polytopes」(代表者: 東谷章弘) を京都大学数理解析研究所 (RIMS) において開催した。また、最終年度となる 2022 年度には、2023 年 2 月に 2 つの国際会議「Characteristic Polynomials of Hyperplane Arrangements and Ehrhart Polynomials of Convex Polytopes (RIMS)」および「Combinatorial and Algebraic Aspects on Lattice Polytopes (関学大)」を開催し、情報収集および活発な議論を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計22件（うち査読付論文 22件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 12件）

1. 著者名 Ohsugi Hidefumi, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 -
2. 論文標題 PQ-type adjacency polytopes of join graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete and Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00454-022-00447-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Ohsugi Hidefumi, Shibata Kazuki, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 55
2. 論文標題 Perfectly contractile graphs and quadratic toric rings	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1264-1274
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/blms.12789	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Ohsugi Hidefumi, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 1
2. 論文標題 Symmetric edge polytopes and matching generating polynomials	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Combinatorial Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5070/C61055371	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Higashitani Akihiro, Ohsugi Hidefumi	4. 巻 226
2. 論文標題 Quadratic Groebner bases of block diagonal matching field ideals and toric degenerations of Grassmannians	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2021.106821	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ohsugi Hidefumi, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 237
2. 論文標題 Enriched chain polytopes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 485-500
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-020-2012-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ohsugi Hidefumi, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 26
2. 論文標題 Reflexive polytopes arising from bipartite graphs with gamma-positivity associated to interior polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-020-00588-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ohsugi Hidefumi, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 66
2. 論文標題 The h^* -polynomials of locally anti-blocking lattice polytopes and their gamma-positivity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete and Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 701-722
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00454-020-00236-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ohsugi Hidefumi, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 7
2. 論文標題 Enriched order polytopes and enriched Hibi rings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 48-68
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-020-00403-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hibi Takayuki, Ohsugi Hidefumi, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 69
2. 論文標題 Integer decomposition property for Cayley sums of order and stable set polytopes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 765-778
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1307/mmj/1585792887	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Ohsugi Hidefumi	4. 巻 3
2. 論文標題 Toric ideals of Minkowski sums of unit simplices	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 831-837
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/alco.117	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ohsugi Hidefumi, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 293
2. 論文標題 Nef partitions arising from unimodular configurations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 1791-1800
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.201900347	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計20件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 大杉英史
2. 発表標題 Quadratic Groebner bases of block matching field ideals
3. 学会等名 MFO-RIMS Tandem Workshop "Symmetries on polynomial ideals and varieties" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 Two enriched poset polytopes
3. 学会等名 Toric Topology 2019 in Okayama (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 Locally anti-blocking lattice polytopes and their h^* -polynomials
3. 学会等名 Commutative Algebra and Lattice Polytopes (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 Ehrhart theory and interior polynomials
3. 学会等名 Recent advances in matroids and Tutte polynomials (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大杉英史, 土谷昭善
2. 発表標題 Reflexive polytopes arising from bipartite graphs with h^* -positivity associated to interior polynomials
3. 学会等名 AMS Spring Central and Western Sectional Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 東谷章弘
2. 発表標題 Regular unimodular triangulations of dilated empty simplices and Grobner basis
3. 学会等名 JCCA 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 東谷章弘
2. 発表標題 Characterization problem on Ehrhart polynomials of lattice polytopes
3. 学会等名 Algebra Geometry Combinatorics Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Juergen Herzog, Hibi Takayuki, Ohsugi Hidefumi	4. 発行年 2018年
2. 出版社 Springer International Publishing	5. 総ページ数 321
3. 書名 Binomial Ideals	

〔産業財産権〕

〔その他〕

関西学院大学理学部大杉英史 https://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~hohsugi/index.html
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	東谷 章弘 (Higashitani Akihiro) (60723385)	大阪大学・情報科学研究科・准教授 (14401)	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 協力者	土谷 昭善 (Tsuchiya Akiyoshi)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 Characteristic Polynomials of Hyperplane Arrangements and Ehrhart Polynomials of Convex Polytopes	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Combinatorial and Algebraic Aspects on Lattice Polytopes	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Commutative Algebra and Lattice Polytopes	開催年 2019年～2019年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	San Francisco State University	University of Minnesota		
ドイツ	Freie Universitaet Berlin	MPI for Mathematics in the Sciences		
スウェーデン	Royal Institute of Technology			