

令和 5 年 9 月 15 日現在

機関番号：32606

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18H01137

研究課題名(和文)非圧縮流体の力学的諸問題の数理的研究

研究課題名(英文)Mathematical research on mechanical problems of incompressible fluid

研究代表者

岡本 久 (Okamoto, Hisashi)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：40143359

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,000,000円

研究成果の概要(和文)：ナビエ・ストークス方程式のコルモゴロフ問題を研究した。これは2次元トーラス上の流れに関する問題で、外力を様々に入れる。本研究では、レイノルズ数が大きいときにある意味で不偏的な巨大渦が発生することが確かめられた。巨大渦の存在は古くから経験されてきたところであり、2次元における乱流理論が予言するところでもあった。しかし、本研究ではそれが単純な定常解としてより明瞭な形で確認された。また、水面波の問題に置いて2種類の異なる渦領域の上を伝搬する波の厳密解を解散した。数値計算で得られたもので、よどみ点がいくつも現れることを発見した。非線形放物型方程式の解の爆発現象において新しい差分近似法を提案した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
特異摂動の問題に極めて不思議な解が存在することを数値実験で確かめた。それを保証する数学的な理論も部分的に提出された。しかし、完全な解決には程遠い。これらは次の世代への問題とすることができる。特にプラントル・パチエラー理論の一般化には大きな魅力を感じる。

研究成果の概要(英文)：The Kolmogorov problems for the two-dimensional Navier-Stokes equations was studied and a kind of universal patterns for large vortices were confirmed by the numerical experiments. Water-waves on two vortical layers were computed numerically, and many highly nontrivial solutions of many stagnation points were discovered. New method of computing the blow-up time for nonlinear parabolic equations were proposed.

研究分野：mathematics

キーワード：Navier-Stokes equations

1. 研究開始当初の背景

ナビエ・ストークス方程式やオイラー方程式は流体力学の基礎となる非線形偏微分方程式である。この偏微分方程式の解がいかなる性質を持つかが調べたい。同方程式の研究者は数学に限っても数多く、様々な立場から研究されている。特にレイノルズ数が大きな場合に解がどういうふるまいを見せるかが大事なポイントとなる。一方、こうした問題は大きな困難を伴うので、多少単純化したモデルを考えて、それを不可研究することも有用である。非線形放物型方程式の解の爆発問題はそうした背景から生み出された問題である。

2. 研究の目的

ナビエ・ストークス方程式やオイラー方程式は流体力学の基礎となる非線形偏微分方程式である。本研究では以下の三課題に挑戦する予定である：

[A] 巨大レイノルズ数におけるパターン形成。

流体の粘性が小さいとき、その運動は複雑化し、乱流となる。これはほぼ正しい命題であるが、補足説明が必要である。現実の流体はもちろん3次元であるが、惑星表面の大気の流れのように、2次元流で良く近似できるものもけっこうある。こうした流れでは、完全に乱れきった一様な乱流というものはずしも見いだされない。むしろ、十分に時間がたった後では、時間的には不規則であるが、空間パターンは比較のおとなしいということもある。こういった現象の極致にあるのが、単峰解である。単峰解がいつも存在するかどうかという問題と、それがどれくらいたくさんあるのかを5年間で解決したい。

[B] 解が有限時間で爆発するモデル方程式の研究およびその爆発解の数値計算法。

一般に、非線形発展方程式の解は有限時間で爆発し得る(何らかの特性が無限大になる)。その爆発時刻はどれくらいか、爆発時刻近傍における解の形状はどのようなものか、といった問題が重要なものと考えられている。伝統的に、日本ではこうした問題を研究する数学者は多い。だが、数値計算で定量的に解を捉えるための計算方法については、未解決の問題は多い。

[C] 水面波の数値計算。

これまでは、渦無しの流れの自由表面の形状を決定する問題を対象としてきたが、近年は渦有り流れの表面の形状決定問題が欧米で勃興しつつある。

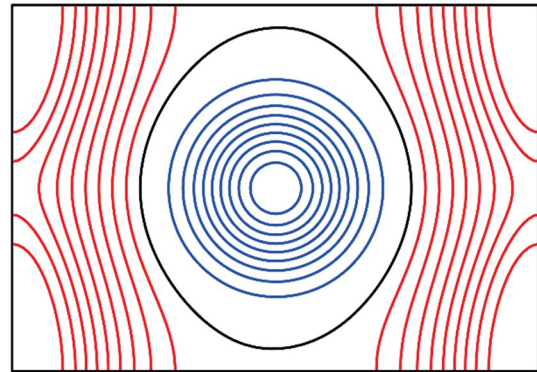
3. 研究の方法

研究の方法はおおむね数値実験によるものである。これまで内外の研究者と行ってきた共同研究で使われてきたコンピュータプログラムは多少の手直しで使うことができる。一方、コルモゴロフ問題では特異摂動問題が現れるが、そこで使われる研究では漸近解析の手法が大事となる。解の特異性あるいは擬特異性をあらかじめ見出しておき、それを活用しないと数値計算も破綻する。

4. 研究成果

{A} コルモゴロフ問題における進展。

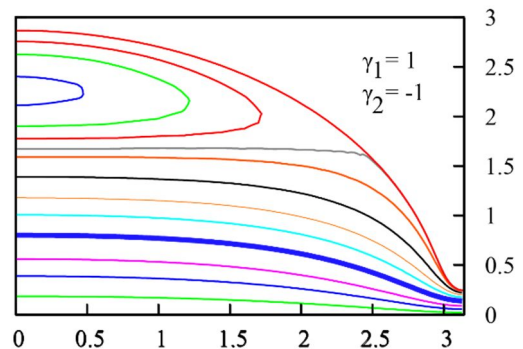
外力を入れたナビエ・ストークス方程式を2次元トーラスで考える。外力をいろいろと変えても、それにあまり依存しない、ある意味で普遍的な性質を持つ渦が存在することがわかった。さらに、渦のパターンの中で、流線がほぼ円形をしているものが多数見つかった。外力には一切円形の要素がないにも関わらずこうした解が多数出てくることは注目に値する現象であろう。そうした円形の流線の性質を調べるために、韓国の Chung-Ang 大学の S.-C. Kim 教授と共同研究を行い、Prandtl-Batchelor 理論の一般化を試みた。部分的に成功し、解の定量的な性質が極めて精密に理論的に予測できることがわかった。例えば、右図は本研究で得た解の流線であるが、青地の丸い部分の説明が理論的にできた。また、別のあるケースでは、流線がほぼ直線になるような解も得られた。これを理論的に説明しようとする、上記の Prandtl-Batchelor 理論の枠組みではうまくいかないこともはっきりしてきた。この場合にも使える手法の開発にエネルギーを注いでいる。



これを理論的に説明しようとする、上記の Prandtl-Batchelor 理論の枠組みではうまくいかないこともはっきりしてきた。この場合にも使える手法の開発にエネルギーを注いでいる。

[B] 台湾の卓建宏氏(中正大学、のちに中山大学)とともに、解の爆発を数値計算するアルゴリズムを開発し、その性質を調べた。特に、高次元の軸対称な流れの場合に解の爆発時間を数値的に計算するアルゴリズムを見出し、その収束証明を行った。研究最終年にはこうしたアイデアを分数べき微分の発展方程式に応用する研究を行ってきたが、まだ発表できるまでには至っていない。

[C] 水面波の研究。研究協力者東海林まゆみ氏(日本女子大学教授)とともに、渦有の流れに発生する定常な水面波を数値的に研究した。二層の渦を考え、その表面に現れる波形を計算すると、様々の新しいパターンが見つかった。さらに、水面下に多くのよどみ点が現れる解も見つかった(右図)。どこによどみ点が発生するか、理論的に予測したいところであるが、今のところできていない。ウィーン大学のヘルマン教授とは Fornberg-



Witham 方程式の適切性について共同研究を行った。本研究ではある種の分散があっても解に衝撃波が出るのが数値的に示唆されているが、その数学的な証明は今だできていない。この微分方程式は可積分系ではないと思われる。保存量も見つかっていない。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件／うち国際共著 5件／うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 T. Miyaji & H. Okamoto	4. 巻 36
2. 論文標題 Existence proof of unimodal solutions of the Proudman-Johnson equation via interval analysis	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Japan J. Indust. Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 287, 298
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-018-00339-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 G. Hoermann & H. Okamoto	4. 巻 39
2. 論文標題 Weal periodic solutions and numerical case studies of the Fornberg-Whitham equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Disc. Conti. Dynam. Sys. A,	6. 最初と最後の頁 4455, 4469
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2019182	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hisashi Okamoto	4. 巻 2
2. 論文標題 Models and Special Solutions of the Navier-Stokes Equations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids	6. 最初と最後の頁 729-780
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-13344-7_14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Sun-Chul Kim, T. Miyaji, and H. Okamoto	4. 巻 35
2. 論文標題 Unimodal solutions of the generalized Constantin-Lax-Majda equation with viscosity	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Japan J. Indust. Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 1065-1083
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-018-0320-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tomoyuki Miyaji and H. Okamoto	4. 巻 36
2. 論文標題 Existence proof of unimodal solutions of the Proudman-Johnson equation via interval analysis	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Japan J. Indust. Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 287-298
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-018-00339-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Cho Chien-Hong, Okamoto Hisashi	4. 巻 52
2. 論文標題 Finite difference schemes for an axisymmetric nonlinear heat equation with blow-up	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 ETNA - Electronic Transactions on Numerical Analysis	6. 最初と最後の頁 391 ~ 415
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1553/etna_vol152s391	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kim Sun-Chul, Okamoto Hisashi	4. 巻 89
2. 論文標題 Prandtl-Batchelor Theory for Kolmogorov Flows	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Physical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 114401 ~ 114401
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7566/JPSJ.89.114401	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Shoji Mayumi, Okamoto Hisashi	4. 巻 38
2. 論文標題 Stationary water waves on rotational flows of two vortical layers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 79 ~ 103
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-020-00431-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mean Sovanna, Unami Koichi, Okamoto Hisashi, Fujihara Masayuki	4. 巻 415
2. 論文標題 A thorough description of one-dimensional steady open channel flows using the notion of viscosity solution	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Applied Mathematics and Computation	6. 最初と最後の頁 126730 ~ 126730
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.amc.2021.126730	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takayasu Akitoshi, Lessard Jean-Philippe, Jaquette Jonathan, Okamoto Hisashi	4. 巻 151
2. 論文標題 Rigorous numerics for nonlinear heat equations in the complex plane of time	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Numerische Mathematik	6. 最初と最後の頁 693 ~ 750
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00211-022-01291-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Hisashi Okamoto
2. 発表標題 An application of the Prandtl-Batchelor theory to the Kolmogorov flows
3. 学会等名 East Asia SIAM Conference (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hisashi Okamoto
2. 発表標題 An application of the Prandtl-Batchelor theory to the Kolmogorov flows
3. 学会等名 Int. Conference on Modeling, Computations, Theoretical Analysis on Fluid Dynamics and Related Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hisashi Okamoto
2. 発表標題 Numerical experiments for weak solutions of the Fornberg-Whitham equation
3. 学会等名 Kyoto univ.--Chung-Ang Univ. Conference on Nonlinear PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hisashi Okamoto
2. 発表標題 Numerical experiments for weak solutions of the Fornberg-Whitham equation
3. 学会等名 Modeling, applied analysis and computation of fluids, SUSTech, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hisashi Okamoto
2. 発表標題 Mathematical issues on high-Reynolds number flows
3. 学会等名 Int. Congress on Industrial and Applied Mathematics, Valencia, Spain (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hisashi Okamoto
2. 発表標題 Existence proof of solutions of fluid mechanics problems via interval analysis
3. 学会等名 Conference (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hisashi Okamoto
2. 発表標題 Numerical computations of water waves with piecewise constant vorticity
3. 学会等名 Taiwan SIAM Annual Conference (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hisashi Okamoto
2. 発表標題 Two-dimensional Large Eddies : a Mathematical Challenge from Fluid Mechanics
3. 学会等名 IBS Workshop for Nonlinear PDE, Korea (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hisashi Okamoto
2. 発表標題 Numerical computation of water waves on two vortical layers
3. 学会等名 A3 Workshop on mathematic of Biology, Fluid Dynamics, and Material Sciences Gangneung, Korea (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hisashi Okamoto
2. 発表標題 Unimodal solutions of the equations of 2D incompressible fluid motion
3. 学会等名 CAMIS International Conference on Partial Differential Equations Theories, Numerics and Applications (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hisashi Okamoto
2. 発表標題 Weak periodic solutions and numerical case studies of the Fornberg-Whitham equation
3. 学会等名 International Conference in Mathematics and Applications (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hisashi Okamoto
2. 発表標題 Numerical experiments for weak solutions of the Fornberg-Whitham equation
3. 学会等名 American Mathematical Society Regional conference, University of Hawaii (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

https://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20170001/index.htm

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	東海林 まゆみ (Shoji Mayumi)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	Chung-Ang University			
中国	National Sun Yat-sen University			