

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01138

研究課題名(和文)高次元におけるカオス発生メカニズムの解明とその応用

研究課題名(英文)On the creation of chaos in higher dimensions

研究代表者

荒井 迅(Arai, Zin)

東京工業大学・情報理工学院・教授

研究者番号：80362432

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、高次元力学系にカオスが発生するメカニズムを解明し、カオス理論の応用範囲を飛躍的に拡大することである。具体的には、1次元からの摂動論を用いることが出来ない本質的に新しい構造の連結なジュリア集合を持つパラメータを中心に、エノン写像のパラメータ空間の構造を解明するための研究を進めた。これは、高次元複素力学系を研究する上で基本的な問題である。この目標のために、パラメータ空間の構造を効率的に探索する数値計算手法、不動点の不安定多様体の精度保証付き数値計算や、グリーン関数を評価してその特異点の存在を数学的に厳密に証明するためのアルゴリズムなど、計算機援用証明の技法を開発した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

力学系の分岐理論は、カオス理論や数理モデルの解析を通して幅広い分野で応用されている。しかし、カオスがどのようにして分岐により発生するかに関する数学的な理解は、今だに1次元力学系の解析で得られたものの延長線上にあり、高次元に特有な分岐のストーリーの理解には至っていない。その事が応用でも制約となっている。本研究は、1次元の分岐理論では現れない、高次元カオスの分岐構造を解き明かすための基礎理論やアルゴリズムを整備するものである。現段階ではエノン写像などの基礎的な例の解析にとどまっているが、将来的にこれまでの制約を乗り越えて新しい応用可能性開くための基礎研究であり、社会的意義は高いと思われる。

研究成果の概要(英文)：This study aims to elucidate the mechanisms by which chaotic behavior arises in high-dimensional dynamical systems, thereby contributing to the application of chaos theory. Specifically, we focused on the structure of the parameter space of the Henon map. We found inherently new structures of the set corresponding to connected Julia sets, which can not be achieved by perturbation from one-dimensional theory. This result refines our understanding of the structure of the parameter space of the Henon map, which is a fundamental problem in the study of high-dimensional chaotic dynamical systems. To achieve this goal, we developed several algorithms for computer-assisted proofs, including numerical methods to explore the structure of parameter space efficiently, validated numerical computations of the unstable manifolds of fixed points, and algorithms to evaluate the Green's function and mathematically rigorously prove the existence of its singularities.

研究分野：力学系

キーワード：力学系 カオス 分岐 エノン写像 計算機援用証明

1. 研究開始当初の背景

力学系において、軌道が初期値に鋭敏に依存するために系の未来予測が困難になる現象をカオスという。一時は 20 世紀の物理学における最大のパラダイムシフトとも呼ばれ、ある種のブームを巻き起こしたカオス理論であるが、その応用範囲はブーム時の想定ほどには広がっていない。原因のひとつは、高次元でカオスが発達するメカニズムが数学的にわかっていない事である。1 次元の場合には、可積分に近い(複雑ではない)力学系から、周期倍分岐のカスケードを通過してカオスが成長するという分岐のストーリーがあり、また本質的にそのストーリーしかない事がリーディング理論や繰り込みの手法などにより数学的に証明されている。しかし、カオス理論の誕生から 50 年を経た現在でも、2 次元以上の力学系に対しては、どのような分岐ストーリーが可能かという基本的な事実も良くわかっていない。そのため、1 次元力学系では説明できない現象にカオス理論を応用するのは難しかった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、高次元力学系にカオスが発生するメカニズムを解明し、カオス理論の応用範囲を飛躍的に拡大することである。具体的には、申請者や分担者がこれまで研究を進めてきた、力学系の構造安定性証明アルゴリズムや、複素力学系のモノドロミーを用いた実力学系の表現、また組紐を使った周期点の分類、さらにはそれらを計算トポロジーや精度保証付き数値計算を用いた実装する技術などを統合し、この状況を打破する新しい分岐理論を構築する。構築した理論は計算機援用証明アルゴリズムとして実装し、ライブラリを公開する。

3. 研究の方法

本研究では以下のアイデアを用いて高次元における困難を克服し、高次元力学系の相空間およびパラメータ空間の構造を探索するアルゴリズムを開発する。

まず、第一のアイデアとして、分岐ではなくその反対の構造安定性を扱うという手法である。これは申請者が先行研究で開発した手法であり、分岐が起きない領域を特定することにより、分岐をその補集合として浮かびあがらせる。例えば右図の赤い領域は、エノン写像という 2 次元力学系で最も重要な例において、分岐が起きないことをこの手法で証明できたパラメータである。左端の \emptyset と書かれた領域は可積分な領域であり、右端の“Full Horseshoe”は最も発達したカオスである馬蹄形写像が起きるパラメータ領域である。この図によりエノン写像の分岐の理解は大きく進んだが、これだけでは領域間の相互の関係の理解が不完全であり、プルーニングフロントの変化が記述できない。そこで、本研究ではこの手法を発展させつつ、以下のアイデアと融合させる。



第二のアイデアは、力学系の複素化である。1 次元の力学系研究で示されたように、実力学系に関する研究であっても、変数やパラメータを複素化した複素力学系を経由したほうが、より強力がつ見通しのよい成果が得られる。これを高次元の力学系、例えば上に挙げたエノン写像に適用することにより、高次元のマンドルブロ集合の構造を通して、高次元カオスの発生するストーリーを理解することを目指す。

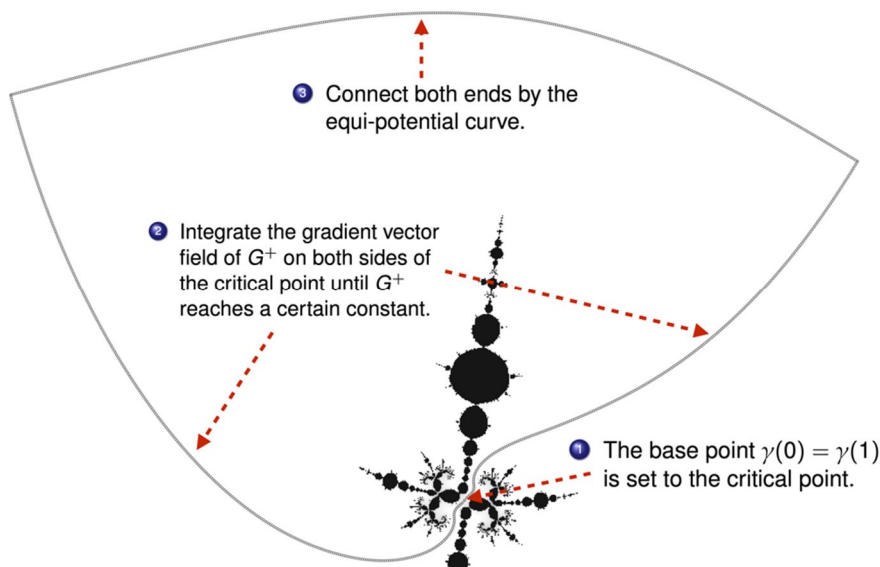
4. 研究成果

代表者と分担者の共同研究により、高次元マンドルブロ集合の構造に関する新しい発見が得られた。具体的には、1 次元からの摂動論を用いることが出来ない、本質的に新しい構造の連結なジュリア集合を持つパラメータをまず発見した。さらに、そのパラメータと、連結なジュリア集合を持つ 1 次元力学系のパラメータとは高次元マンドルブロ集合の異なる連結成分に入ること数値的に確認し、それを証明するためのアルゴリズムを開発した。実行速度の問題から、複素パラメータ空間内では異なる連結成分であることの証明はまだ完了していないが、実パラメータ空間に制限した場合の同様な主張に関しては数学的に厳密な計算機援用証明を完成した。

この研究を進展させる上で、幾つもの新しいアルゴリズムを開発した。特に重要なのは、エノン写像のジュリア集合の非連結性を厳密に証明するための幾何学的なアルゴリズムである。1 次元力学系の場合であれば、非連結性は critical point の軌道の非有界性を調べれば判明するので、簡単な数値アルゴリズムが存在したが、エノン写像は critical point を持たないため、そ

のような手法が存在しなかった。そこで、本研究では写像の critical point ではなく、写像に付随して定義されるグリーン関数の critical point の存在を厳密に証明するアルゴリズムを構築することで、この問題を突破した。

ここで問題になるのが、グリーン関数はジュリア集合を除いた相空間で調和になる関数であるが、定義内に極限操作を含むことから、値の厳密な評価が簡単ではないことである。数値的に critical point を探し、その存在を検証するためには、ニュートン法やその区間演算版である interval Krawczyk 法などの利用がまず考えられるが、グリーン関数の微分や2階微分の厳密な評価は極めて難しく、現実的な実行時間でこれを行なうアルゴリズムの開発は難しい。そこで、本研究では、グリーン関数の critical point の存在を直接示すのではなく、数学的にそれと同値な、ジュリア集合を分離するループの存在を厳密に示すことで、目的を達成するアルゴリズムを構築した。計算が大域的になるかわりに、高階微分を用いなくても位相的な条件から結論が従うという方針である。



上の図は、実際にあるパラメータにおいて、複素エノン写像の不動点の不安定多様体でスライスしたジュリア集合の図である。図に示されたように、critical point(と数値的に思われる点)から、グリーン関数の勾配流とグリーン関数の等高線を用いて、ジュリア集合を分離するループを構成している。このループの上では、グリーン関数が厳密に正の値を取ることが区間演算を用いた計算機援用証明で示される。これにより、実際にグリーン関数の critical point が存在すること、またジュリア集合が(スライス上でのみならず複素2次元空間内で)不連結であることが従う。

本研究で開発したこれらのアルゴリズムは、エノン写像のみならず複素力学系の研究において有用なものであると思われ、さらなる高速化やライブラリの整備を進めている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 石井豊	4. 巻 2211
2. 論文標題 複素力学系の問題	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 23-44
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Takuro Tsutsumi, Yuriko Ono, Zin Arai, Tetsuya Taketsugu	4. 巻 16
2. 論文標題 Visualization of the Dynamics Effect: Projection of on-the-Fly Trajectories to the Subspace Spanned by the Static Reaction Path Network	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Chemical Theory and Computation	6. 最初と最後の頁 4029-4037
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1021/acs.jctc.0c00018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hiroki Koda, Zin Arai, Ikki Matsuda	4. 巻 15
2. 論文標題 Agent-based simulation for reconstructing social structure by observing collective movements with special reference to single-file movement	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 PLOS ONE	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1371/journal.pone.0243173	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Yutaro Himeki, Yutaka Ishii	4. 巻 40
2. 論文標題 M ₄ is regular-closed	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Ergodic Theory and Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 213-220
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/etds.2018.27	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Zin Arai, Yutaka Ishii and Hiroki Takahasi	4. 巻 17
2. 論文標題 Boundary of the Horseshoe Locus for the Henon Family	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Applied Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 2234 ~ 2248
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/18M1174684	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Zin Arai and Yutaka Ishii	4. 巻 361
2. 論文標題 On Parameter Loci of the Henon Family	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 343 ~ 414
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-018-3174-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計9件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Zin Arai
2. 発表標題 Moduli of stability on the first bifurcation curve of the Henon map
3. 学会等名 RIMS Symposium: Recent Developments in Dynamical Systems and their Application
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 石井豊
2. 発表標題 複素力学系の問題
3. 学会等名 複素幾何学の諸問題II (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Zin Arai
2. 発表標題 Moduli of stability on the first bifurcation curve of the Henon map
3. 学会等名 2020 年度冬の力 学系研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 石井豊
2. 発表標題 4次元可視化プロジェクト
3. 学会等名 VRを用いたインタラクティブな高次元認識（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Zin Arai
2. 発表標題 On period doubling bifurcations
3. 学会等名 第9回岐阜数理科学研究会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Zin Arai
2. 発表標題 Period doubling bifurcations from complex and algebraic points of view
3. 学会等名 Rutgers University Dynamical Systems Seminar（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 荒井迅
2. 発表標題 力学系の大域的な分岐とその計算について
3. 学会等名 岩手数理科学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Zin Arai
2. 発表標題 The Conley index for the real and complex Henon maps
3. 学会等名 Algebraic Topology in Data and Dynamics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Zin Arai
2. 発表標題 On the monodromy and period doubling bifurcations of the Henon map
3. 学会等名 Real and Complex Dynamics of Henon's Map（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Web page of Zin Arai http://www.is.c.titech.ac.jp/~zin/</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	石井 豊 (Ishii Yutaka) (20304727)	九州大学・数理学研究院・教授 (17102)	
研究分担者	三波 篤郎 (Sannami Atsuro) (30154157)	北見工業大学・工学部・教授 (10106)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関