

令和 4 年 6 月 21 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18H01435

研究課題名(和文) ルート系に付随する数学対象を用いた挿入/削除の考察

研究課題名(英文) Study on Insertion/Deletion by Mathematical Method of Root Systems

研究代表者

萩原 学 (Hagiwara, Manabu)

千葉大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：80415728

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究はルート系に付随する数学対象に注目して挿入/削除を考察したものであり、その動機となった「(1)BAD符号の研究」に関する成果、更にBAD符号とLevenshtein符号に対する「(2)復号アルゴリズムの研究」に関する成果、A,B,D型を含むルート系に対応する「(3)完全符号の構成」に関する成果、ルート系に関連する「(4)順序集合論、とくにd完全順序集合への応用」などへの成果、さらに応用した「(5)量子通信への応用」を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

挿入/削除誤り訂正符号はそれ自体が符号理論の研究対象として高く注目されている。それとはまったく無縁と思われた数学対象ルート系との関連が垣間見れたことで、科学の不思議な繋がりが示唆された研究となった。符号理論としての成果だけでなく、ゲーム理論や量子計算などの成果も得られたことで、幅広い分野に影響を与える研究となった。

研究成果の概要(英文)：This research is a study of insertion/deletion focusing on mathematical objects associated with root systems. The following results are obtained: (1) Research on BAD codes," which is the motivation of this study. (2) Research on decoding algorithms for BAD codes and Levenshtein codes and (3) Construction of perfect codes corresponding to root systems including types A, B, and D. (4) Application to ordered set theory, especially d-complete ordered set, as mathematical research from root systems view points. (5) Application to quantum communication, as applications of this study.

研究分野：符号理論

キーワード：符号理論 削除誤り訂正符号 削除 ワイル群 ミヌスクル表現 挿入

1. 研究開始当初の背景

挿入 / 削除符号は 1960 年代から現代まで世界中で継続的に研究されてきた対象であり、情報理論だけでなく、バイオインフォマティクス・計算機科学からも注目されている。特に最近では、次世代ストレージへの応用が見いだされ、学術的にも科学技術的にも期待が高まっている。それにも関わらず、劇的な進展が得られない難しい理論である。研究代表者は、理論が難しい理由には基礎理論の欠如があると考え、1960 年代の符号の文献調査を進めるうちに、既存の符号が B 型のルート系 (特に Weyl 群の minuscule 元) と繋がることを発見した。さらに研究を進展させ、A 型の挿入 / 削除や A 型の完全符号の構成と呼ばれる新たな理論を得た。

そこで、本研究ではルート系の他の型 (C、D、E、F、G、H、I 型) の視点から挿入 / 削除符号の研究を行い、挿入 / 削除符号の基礎理論となる新たな数学的手法を創出する。

2. 研究の目的

本研究の大きな目的は「挿入 / 削除符号の学術的理論体系を構築すること。とくにその基礎理論に寄与する知見を得ること」にある。その為のアプローチは様々に考えられ、実際国内外で 50 年もの間研究が続けられてきたが飛躍的な進展が得られていない。であれば、急がば回れと言われるように、基盤となる学術的基礎理論を構築することが重要であると考えている。そこで本研究では、「Levenshtein による VT 符号の理論でなぜ美しい結果が得られたのか」、「挿入 / 削除の記述に適した数学理論は何か」、「そもそも挿入 / 削除とは何か」といった問題を見据える。

具体的な方針として、挿入 / 削除符号と Lie 群、Lie 環、Weyl 群とその Minuscule 表現、と言ったルート系に付随する数学を結びつける理論の構築を目標とする。これらの対象は微分方程式の研究から生まれた概念であり、理論物理にも応用されてきた。しかし、挿入などの「誤り」を記述することにルート系を利用するアプローチは、研究代表者の知る限り、考えられてこなかった独自性と新規性が顕著なアイデアである。

本研究は、情報理論・符号理論と純粋数学を結びつける全く新たな手法や知見を創造する。

3. 研究の方法

本研究では、研究体制がこれまでに成果を挙げた研究手法を他の型に適用することで、挿入 / 削除とルート系の繋がりを考察し、ルート系が挿入 / 削除符号に本質的に影響する現象を明らかにしながら数学理論構築をしていく。これまでの手法をまとめると以下となる：

(1) うまく表現空間を探し、正ルート系の和の半分を求める。有効性を例で述べる：VT 符号の定義を紐解けば、本質的にはベクトル $(1, 2, 3, \dots, n)$ が重要となる。このベクトルは B 型ルート系の特定の表現の下での正ルート系の和を半分にしたものと解釈できる。

例：3 次元の B 型正ルート系は 9 つのベクトル $(2, 0, 0)$ 、 $(0, 2, 0)$ 、 $(0, 0, 2)$ 、 $(\pm 1, 1, 0)$ 、 $(\pm 1, 0, 1)$ 、 $(0, \pm 1, 1)$ で構成され、その和を半分にしたものはベクトル $(1, 2, 3)$ と一致する。

(2) 符号の集合を minuscule 元 (定義は J. Stembridge, Minuscule elements of Weyl groups, J. Algebra 235 (2001), 722-743. を参照) や minimal coset representatives (定義は J. E. Humphreys, Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge Press, 1992 を参照) の視点から定義する。B 型ではベクトル $(1, 2, 3)$ が一意に定まったが、A 型では候補が複数あり選定に苦心した。一般には $(1, 2, 3)$ の選定が研究進展のポイントになると見込まれるため、Stembridge 氏や R. M. Green 氏らと時間をかけて議論し、研究代表者や研究分担者の研究室の大学院生等と協力して計算していく。

(3) 最高ルートと呼ばれる特殊なベクトルに対し、それを法線ベクトルとする超平面での鏡映と生成系による最短表示を一つ固定することで、誤りモデルを定める。B 型では最短表示が一意に定まったが、A 型では複数あり、個別に独特の現象が発生した。こちらも研究分担者の仲田氏や R. M. Green 氏らと時間をかけて議論し、研究代表者や研究分担者の研究室の大学院生等と協力して計算していくことになる。

(4) これまでの 1 ~ 3 で定義した符号や誤りモデルにより得られたベクトル $(1, 2, 3)$ への作用はユークリッド空間上の作用であるため、ビット列への対応を定義する。A 型では、結果的に 01 もしくは 10 の挿入と解釈できたが、その過程で peeling 置換という特別な置換を提案する必要が発生した。

以上の具体的な手順を C、D、E、F、G、H、I 型に適用させることで研究の進展が見込まれる。その為には、表現空間の選定、ベクトル $(1, 2, 3)$ の選定、最短表示の選定、ビット列への対応などに研究の経験、知識、さらにブレイクスルーなどが必要となる。文献調査、上で述べた国内外の専門家との議論、国際会議等での成果発表や情報収集を通じて、研究スキルを上げ、恒常的に計算を進めることが課題解決への着実な歩みとなる。

初めは各型への個別の適用を進め、知見が得られていく過程で、複数の型に同時に適用できる一般論、つまり型に依存しない、ルート系が挿入 / 削除符号に本質的に影響している箇所を明らかにする。

かにする理論を構築していく。

4. 研究成果

(1) BAD 符号の研究 : A 型削除の 1 つ BAD (Balanced Adjacent Deletion) を訂正する符号は、本研究の動機となった符号である。考察を深めることで、次の成果を得た。符号語数に対して上限と下限を得た。代表者が過去に構成していた BAD 向け符号をその構成方法に由来し、Azinv 符号と名付けた。Azinv 符号は、漸近的に符号語数最大であることが判明した。Levenshtein 符号の復号アルゴリズムに類似するように、Azinv 符号に対する復号アルゴリズムの開発できた。

(2) 復号アルゴリズムの研究 : 上で述べた Azinv 符号の復号法に加えて、Levenshtein 符号を一般化したモノトーン符号についても、効率的な復号アルゴリズムを構成できた。特に、本研究の主眼である、ルート系の視点で拡張することで、非常に類似したアルゴリズムで、異なる誤りと異なる構造をした符号の誤り訂正が可能になった。

(3) 完全符号の構成 : 典型的な 1 削除誤り訂正完全符号である Varshamov-Tenengol'tz 符号が B 型ワイル群の最高短ルートに対応する鏡映を用いて記述できる、という洞察は、削除誤りを理論的に考察する重要な一つのツールとなる。上述の BAD 符号もこの文脈の中で理解することができるが、この方向でさらにワイル群の型を変更したり、鏡映を変更することで様々な完全符号の構成に成功した。(a) B 型ワイル群における最高長ルートに対応する鏡映を用いた場合、(b) D 型ワイル群の最高ルートに対応する鏡映を用いた場合、(c) 不定形ワイル群のある種の鏡映を用いた場合である。(a) では、当該符号が Levenshtein 符号 $L_a(n; 2n)$ に一致し、これがある種のパリティ条件を満たす 2 ビット削除に関して完全であることが示された。(b) でもある種のパリティ条件を満たす 2 ビット削除に関して完全な符号が構成できた。(c) ではある種のパリティ条件を満たす任意個のビット削除に関して完全な符号の構成に成功した。これらの成果によって、削除誤り(の一端)とワイル群の理論的関係性が明確になってきた。

(4) 順序集合論、とくに d 完全順序集合への応用 : d 完全順序集合は、ミナスクル元と呼ばれるワイル群の元の組み合わせ論的実現であり、B 型ワイル群の場合、ミナスクル元は 0 と 1 からなる列、つまり符号語として理解できる。つまり、この意味で d 完全順序集合は符号語の一般化とみなされることになる。このような動機から、d 完全順序集合の組み合わせ論や表現論を研究し、いくつかの成果を得た。(a) 古典型量子展開環の結晶基底の多面体表示を d 完全順序集合の一般化を用いて実現した。(b) d 完全順序集合のいくつかのクラスに対する全単射証明によってフック公式を証明した。(c) アフィン A 型の場合の無限 d 完全順序集合に対するフック公式を証明した。(d) 無限 d 完全順序集合に定まる二種類の順序関係が一致する十分条件を得た。(e) d 完全順序集合のあるクラスについて、対応する組み合わせゲームの必勝戦略を与える Grundy 関数の明示公式を与え、関連する分割恒等式を与えた。これらの成果により、d 完全順序集合の組み合わせ論や表現論と削除誤りとがルート系を介して関係している証左が得られたと言えそうである。

(5) 量子通信への応用 : 削除誤り訂正の理解が深まったことで、量子削除符号に関する構成法が得られた。量子削除符号は、世界で見つかっていなかったため、大きな発見と考えている。本筋とは異なるテーマであるが、本研究の知見から発想を得たところが大きい。特に、最も符号長の短い 4 量子ビット符号は、A 型のワイル群による作用で不変な構造を持つことから、削除符号とルート系が量子情報の世界でも繋がりを持つ可能性を感じる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Nakayama Ayumu, Hagiwara Manabu	4. 巻 9
2. 論文標題 The First Quantum Error-Correcting Code for Single Deletion Errors	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 IEICE Communications Express	6. 最初と最後の頁 100-104
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1587/comex.2019XBL0154	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Mori Takehiko, Hagiwara Manabu	4. 巻 343
2. 論文標題 A number theoretic formula and asymptotic optimality of cardinalities of BAD correcting codes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 111852 ~ 111852
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2020.111852	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hoshino A., Nakada K.	4. 巻 60
2. 論文標題 Polyhedral realizations of crystal bases $B(\)$ for quantum algebras of nonexceptional affine types	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 091704 ~ 091704
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5043554	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Nakada	4. 巻 -
2. 論文標題 Order structure of shapes of predominant integral weights and cylindric Young diagrams	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Tatsuhiko Mori, Manabu Hagiwara	4. 巻 1
2. 論文標題 Cardinalities of BAD Correcting Codes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceeding of ISITA 2018	6. 最初と最後の頁 13-18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.23919/ISITA.2018.8664349	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Justin Kong, David Webb, Manabu Hagiwara	4. 巻 1
2. 論文標題 Formalization of Insertion/Deletion Codes and the Levenshtein Metric in Lean	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceeding of ISITA 2018	6. 最初と最後の頁 1-6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.23919/ISITA.2018.8664354	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Manabu Hagiwara, Justin Kong	4. 巻 1
2. 論文標題 Descent Moment Distributions for Permutation Deletion Codes via Levenshtein Codes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceeding of ISIT 2018	6. 最初と最後の頁 81-85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/ISIT.2018.8437626	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Manabu Hagiwara
2. 発表標題 An Introduction to How to Relate Coding Theory and d-complete Posets
3. 学会等名 Joint Mathematics Meetings 2020 (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kento Nakada
2. 発表標題 Order structure of infinite d-complete posets
3. 学会等名 Joint Mathematics Meetings 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kento Nakada
2. 発表標題 A certain code correcting two deletions with specified position
3. 学会等名 Joint Mathematics Meetings 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 萩原学
2. 発表標題 二次元削除誤り訂正符号の構成
3. 学会等名 第42回情報理論とその応用シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山崎 大雅, 萩原 学
2. 発表標題 単一削除符号の漸近的最大濃度の別証明
3. 学会等名 第42回情報理論とその応用シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高橋 朋久斗, 萩原 学
2. 発表標題 Levenshteinの削除誤り訂正アルゴリズムの一般化
3. 学会等名 第42回情報理論とその応用シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 近藤 裕樹, 萩原 学
2. 発表標題 Lean を用いたLevenshtein 符号と復号アルゴリズムの形式化
3. 学会等名 第42回情報理論とその応用シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中山 歩・萩原 学
2. 発表標題 単一削除誤りに対する量子誤り訂正符号の構成
3. 学会等名 情報理論研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 仲田研登
2. 発表標題 Hillman-Grassl アルゴリズムが適用できるd-complete poset について
3. 学会等名 表現論小研究集会2019甲府
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 仲田研登
2. 発表標題 組合せゲーム理論入門
3. 学会等名 研究集会「実験計画法と符号および関連する組合せ構造」2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 仲田研登
2. 発表標題 Levenshtein code とその一般化について
3. 学会等名 福井 表現論 小研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 仲田研登
2. 発表標題 完全削除符号の拡張について
3. 学会等名 広島・熊本・岡山 代数学研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kento Nakada
2. 発表標題 A certain code correcting two deletions with specified position
3. 学会等名 American Mathematical Society Meeting (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Manabu Hagiwara
2. 発表標題 Weyl groups and perfect codes for generalized deletions
3. 学会等名 American Mathematical Society Meeting (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	仲田 研登 (Nakada Kento) (70532555)	岡山大学・教育学研究科・准教授 (15301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 American Mathematical Society, Special Session of Coding Theory and Information Theory	開催年 2019年～2019年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Colorado University	Miami University	University of Hawaii	他1機関
シンガポール	Nanyang Technological University			
中国	上海大学			
韓国	Ulsan University	Sogang University		