様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2018～2020
課題番号：１８Ｈ０３２５１

研究課題名（和文）波動問題における時間域境界積分法の安定性に関する研究

研究課題名（英文）On the stability of boundary integral methods in wave problems

研究代表者
西村　直志（Nishimura, Naoshi）

京都大学・情報学研究科・名誉教授

研究者番号：９０１２７１１８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　6,500,000円

研究成果の概要（和文）：波動問題における選点法を用いた時間域の境界積分法(境界要素法)の安定性は長年研究されておりながら未だに現実的な解決策が見出されていない難問である．本研究では，非線形固有値問題の解法であるSakurai Sugiura法を用いて，時間域境界積分法の安定性を調べる方法を提案し，数値実験によって提案手法の有用性を確認した．更に，同方法は積分方程式の解の精度に関する知見も与え，安定かつ高精度の積分方程式を特定する上で有効であることを示した．合わせて安定性の高い時間域の3次元高速解法の開発や，形の変わる領域におけるspace time法への適用も行い，良好な結果を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
選点法を用いた時間域の境界積分法は，数値計算上の種々の利点を有する魅力的な解法でありながら，安定性に関する確実な知見が得られていないために広く用いられるには至っていない．本研究は安定性の問題を研究するための新しい方法を提供するものであり，今後，時間域解法を実問題に適用してゆく上で有用なツールとなることが期待される．特に，本手法は安定性の問題を周波数域の積分方程式の固有値問題に帰着させることから直感が効きやすく，安定性の高い積分方程式の定式化を得る上で有用であると考えられる．更に高精度の境界積分法を得る上で有用であることも提案手法の大きな利点である．

研究成果の概要（英文）：Stability of time domain boundary integral methods for wave problems using collocation is a long standing tough problem which still remains open in spite of many efforts to solve it. This study proposes a method to investigate the stability of boundary integral methods in time domain using a solver of non-linear eigenvalue problems called the Sakurai Sugiura method. We test the proposed method via numerical experiments. It is found that the proposed method is effective not only in assessing the stability but in studying the accuracy of boundary integral formulations. We also proposed a stable fast method in 3D as well as a space-time method for variable domains, both of which turned out to be effective.

研究分野：計算科学

キーワード：波動方程式　境界積分法　安定性　櫻井杉浦法

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

境界積分法(境界要素法)は無限領域における波動問題の偏微分方程式の数値計算法として非常に有用である．特に周波数域の解法は，近年は高速解法の発展に伴って従来から問題視されてきた計算効率の悪さも解消され，非常に実用性の高い数値計算法になった．一方，境界積分法による波動問題の時間域解法も魅力的である．しかし時間域の境界積分法には長年の努力にもかかわらず安定性の問題が未解決のままつきまとっている．安定性の証明のある算法もいくつか知られてはいるが，実用性に問題がある．時間域の積分方程式に実用性の高い選点法を用いた場合には，これまで経験的に Burton-Miller 法(以下 BM 法と呼ぶ)を用いた解法や超特異積分方程式を用いたクラック問題の解法の安定性が高いことが知られてきた．しかしこれらの方法の安定性は未だに経験的事実に過ぎず，その本質的な理解は進んでいなかった．要するに，どのようにすれば時間域の境界積分法を安心して使えるかと言う問いに対する実用的かつ的確な答えは存在しなかった．

一方，我々は，ここ数年周波数域の波動問題において，開領域の固有振動数を決定する問題に取り組んできた．通常固有振動数を求める対象は有界領域であり，開領域の固有値問題はあまり研究されていない．しかし複素数の範囲では確かに開領域の固有振動数は存在し，散乱問題の解の性質と密接に結びついている．積分方程式を用いた固有振動数の計算は非線形固有値問題に帰着され，従来その数値計算は難しかったが，Sakurai Sugiura 法の出現によって簡単に実行できるようになった．我々は，ポテンシャル論的な考察により，これらの固有値と時間域の積分方程式の数値解の安定性に密接な関係があるのではないかと考えるに至った．以上が本研究開始当初の背景である．

２．研究の目的

研究開始時に予想していた時間域の境界積分法の安定性のメカニズムは，大略次のようである．まず離散化しない積分方程式を考える．時間域の積分方程式の安定性を決定するのは周波数域の積分方程式の固有値（物理的には固有振動数．以下特性根と呼ぶことにする）の虚部の正負であり，これが正になると時間域の積分方程式は不安定になる．標準的な境界値問題における周波数域の積分方程式は，内部問題の固有値（実数）と外部問題の固有値（負の虚部を持つ複素数）を持っている．外部問題を解くときには複素数の固有値が真の固有値であり，実数の固有値は物理的な意味を持たない見かけの固有値である．真の固有値は変えられないのに対して，見かけの固有値は積分方程式の定式化によって変化する．逆に内部問題を解くときは実数の固有値が真の固有値であり，複素数の固有値が見かけの固有値であって，後者は積分方程式によって変わり得る．いずれにせよ，離散化前の積分方程式自体には不安定性はない．さて，時間域の積分方程式を時間方向に離散化するとき，特性根は周波数域の積分方程式と，時間方向の基底関数に依存する特性方程式の根となり，Sakurai Sugiura 法で求めることができる．これらの特性根は離散化前のそれに，離散化に伴う摂動が加わったものである．離散化前に下半面にあった複素数の固有値は摂動が小さいうちは下半面に留まって不安定を引き起こすことはないが，実数の固有値は摂動が固有値の虚部を正にするか負にするかで離散化された時間域の境界積分法を不安定化または安定化するのではないか．以上が積分方程式による固有値問題の数値計算法の研究を通して得られた時間域の積分方程式の不安定化のシナリオである．

以上を踏まえて，本研究の第一の目的は，上記の安定性に関する予想を数値実験で確認することにより，時間域境界積分法の不安定化のシナリオの検証をおこなうことである．さらに可能であれば，時間域の境界積分法の安定性を固有値の立場から数学的に証明する方法を探求する．第二の目的は，以上の研究を行うことによって安定性が担保された数値計算手法を種々の時間域境界積分法の実装に反映させ，種々の高速解法や，応用問題，及び最近検討が始められた時空法(space-time method)へ実装することである．

３．研究の方法

まず，2 次元波動方程式の内，外部問題を考え，各種積分方程式と境界条件に対して長時間の数値実験を行い，安定性に関する仮説の検証をおこなう．この際，できるだけ多くの境界形状に対して数値実験を行って，安定性に関して有望な積分方程式を抽出する．また，時間方向に離散化した積分方程式の特性根を求めるプログラムを Sakurai Sugiura 法を用いて実装する．この際，まずは空間的離散化を解析的に取り扱える円形境界の場合を考え，得られた離散化積分方程式の特性根を上記のように Sakurai Sugiura 法で求め，特性根の虚部の正負と数値解法の安定性との関連がシナリオ通りであるか，数値実験により検証する．さらに，与えられた時間方向の基底関数に対して，異なる積分方程式の選択が，解の安定性にどのような寄与をするか Sakurai Sugiura 法で決定した特性根の虚部の符号から検討する．次に，上記の研究内容を 3 次元問題や，弾性波動問題などに拡張し，同様な結論が得られるか検討する．さらに，こうして安定性が結論された数値解法を実用上興味深い 3 次元外部問題に適用し，補間法に基づいた高速解法の実装を行って性能評価を行う．最後に，数値計算により安定性が示唆されたケースについて，算

法の安定性が理論的に示せないか検討する.

４．研究成果

(1) 2 次元円形領域において波動方程式の時間域境界積分法による解法の安定性について研究を行った. まず, 時間域の境界積分法の安定性の問題を周波数域の手法を使って非線形固有値問題に帰着させる方法を考案し, Sakurai Sugiura 法を用いた数値計算手法を開発した. この手法を 2 次元円形境界上の種々のポテンシャルからなる積分方程式に適用し, 時間方向に線形補間を用いたときに数値計算が安定であるようなポテンシャルを特定した. これらを用いて外部 Dirichlet 問題の数値計算を行い, 理論の予測と時間域の数値結果が一致することを確かめた. また得られた安定性解析は, 数値解の精度など, 安定性以外の特性の理解にも有効であることを示した. 特に外部 Dirichlet 問題では, BM 型定式化に一重層ポテンシャルの定数倍を加えた「付加項を有する定式化」が安定性の面からも, 精度の面からも特に良好であることが示された. 次に, 得られた安定性解析手法を円形領域の内外における transmission 問題に適用した. まず, 従来から知られている transmission 問題の積分方程式を修正して, 別途特定した「安定なポテンシャル」のみを用いる形に変形した. 時間域の数値計算の結果, 周波数域において実数の見かけの固有値を持たない積分方程式でも時間域では不安定なものが存在すること,「安定なポテンシャル」を用いて修正した積分方程式を用いると安定な数値計算が可能であること, これらの結果は提案する安定性解析の結果と一致することなどが分かった. さらに円形領域以外でも修正した時間域積分方程式は安定な数値結果を与えることを示した. 以上の検討では時間方向のみの半離散化を施した簡略化した安定性解析を用いたが, これを正当化するために空間方向の離散化の影響を検討した. その結果, 数値実験で使用した程度の空間方向の離散化においては, 空間方向を連続量とみなす安定性解析が有効であることが分かった. 以上の結果を詳述した論文①は Engineering Analysis with Boundary Element 誌に掲載された.

(2) 2 次元波動方程式において, 上記(1)の結果を一般の境界形状に拡張した. 具体的な内容は次のようである. 周波数域の安定性解析は, 周波数域の積分方程式 (すなわち Helmholtz 方程式の積分方程式) において, 核関数を, Helmholtz 方程式の基本解と時間方向の基底関数の Fourier 変換の積の項からなる無限級数に置き換えて, 得られた積分方程式の固有値を求める問題に帰着される. この方法の計算効率の良い実装として, 本研究では引数 (2 点間の距離) に関する表を作成して, これを補間することによって解析効率を確保した. また, 核関数の特異性の強さは対応する周波数域の積分方程式のそれと同じであることを示し, その係数を陽に求めた. 固有値の決定には Sakurai Sugiura 法を用いた. 円形領域の場合について従来の解析と比較して精度を検証した上で, 一般的な形状に関する時間域積分方程式の安定性について検討した. 扱った問題は外部 Dirichlet 問題, および transmission 問題である. この結果, 円形領域で安定と結論された定式化は, 検討した境界形状においてはいずれも安定であることがわかった.

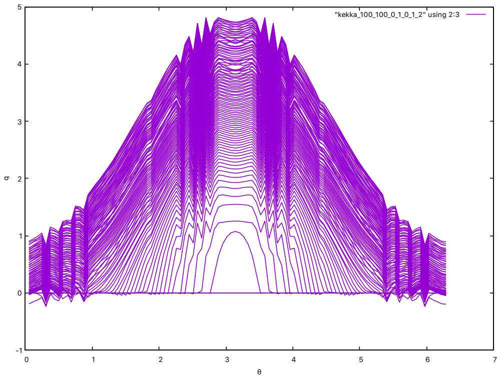
(3) 上記(1)の結果を 2 次元弾性体の場合に拡張した. まず, BM の積分方程式の弾性体版を再考し, 従来行われているスカラーのカップリング定数ではなく, テンソルによってカップリングを行う方法を検討した. この方法は透過境界条件とも関連しており, BM 法の自然な拡張となっている. 数値実験により, 弾性波動の場合にも波動方程式の場合とほぼ同じ結果が成り立つが, 一重層ポテンシャルの表面力や, 二重層ポテンシャルのタイプの積分方程式の安定性については若干の相違もあることがわかった. Transmission 問題についても, 波動方程式の場合とほぼ同一であることが結論された.

(4) (1)の結果を 3 次元波動方程式の場合に拡張した. この場合は, 安定性に関して 2 次元問題と全く同じ結論が得られることがわかった. この結果を踏まえて, 3 次元外部問題において, Spline 補間に基づいた高速多重極法による数値解法を定式化し, 数値実験を行った. この結果, Burton-Miller 型の定式化が, 優れた安定性を有していることが結論された. また, 時間方向の基底関数の次数と安定性の関係が検討され, 理論による予想と概ね一致する結果が得られた.

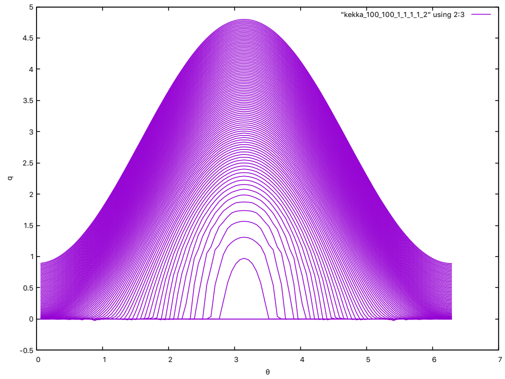
(5) 波動方程式の時間域積分方程式の安定性について理論的に検討した. ただし, 高次元の場合は非常に困難であったため, 空間方向 1 次元の場合に考察を限定した. この結果, 2, 3 次元問題では数値的に安定性が示された諸々のポテンシャルについて, それを核とする 1 次元問題の積分方程式は時間方向に区分線形近似を使用した場合安定であることを証明することができた. さらに, いわゆる space-time 法の基礎的研究として, 領域形状が時間方向に変化する場合を取り上げ, 片側の境界のみ音速より小さい一定の速度で外向きに移動するときの一重層ポテンシャルの時間微分型の積分方程式について, その安定性を考察した. その結果, 固定領域の場合と同様な数値的安定性を証明することができた.

(6) 従来の境界積分法では「境界要素法」の名前が示すように境界方向に要素を導入することが常套手段であった. しかし空間方向の離散化の容易さから, 空間方向に Nyström 法を用いて離散化する計算法が波動方程式においても魅力的であると考えられる. しかし, 波動問題では解が空

間方向に滑らかであることは想定できず，多かれ少なかれ解の滑らかさに依存する Nyström 法の検討，中でも時間域の算法の安定性の考察はあまり行われていないのが現状である．そこで，本研究では 2 次元波動方程式の積分方程式を離散化した際に，Alpert 型の Nyström 法と，折線タイプの境界要素と解析的積分を用いた従来の数値計算法とを比較し，Nyström 法は従来法と同様な安定性を有すること，精度面でも従来法と遜色のない結果が得られること等を示した．



左図：時間微分一重層定式化



右図：付加項を有する定式化

図は外部斉次 Dirichlet 問題を Alpert 型の Nyström 法で解いた結果であり，境界形状は単位円，図の横軸は円周上の角度，縦軸は解の法線微分を種々の時間に対してプロットしたものである．入射波は文献①でも用いた平滑化された時間線形平面波である．本研究で得られた安定性判定法によれば，いずれの定式化も安定性は有しているが，時間微分一重層定式化は精度上の問題があること，付加項を有する定式化は精度上の問題がないことが結論される．図に示した数値結果は，これらの結論と一致しており，本研究で得られた理論の有用性を示している．

(7)その他，得られた安定性の結果を踏まえた応用研究を 2,3 行った．

<引用文献>

① Mio Fukuhara, Ryota Misawa, Kazuki Niino, Naoshi Nishimura, Stability of boundary element methods for the two dimensional wave equation in time domain revisited, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 108, pp 321-338, 2019. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.08.015

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Mio Fukuhara, Ryota Misawa, Kazuki Niino, Naoshi Nishimura	４．巻 108
２．論文標題 Stability of boundary element methods for the two dimensional wave equation in time domain revisited	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Engineering Analysis with Boundary Elements	６．最初と最後の頁 321--338
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.enganabound.2019.08.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 吉川　仁，鈴木　賢人	４．巻 20
２．論文標題 時間域BIEMを用いたゲームエンジンによる 3次元空間を移動する受音点のリアルタイム可聴化	５．発行年 2020年
３．雑誌名 計算数理工学論文集	６．最初と最後の頁 89--93
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計17件（うち招待講演　4件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 西村直志
２．発表標題 波動方程式の時間域積分方程式法の安定性に関する再考
３．学会等名 日本計算数理工学会，計算数理工学フォーラム（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 高橋徹、宮澤直哉、飯盛浩司、松本敏郎
２．発表標題 非定常波動問題に対する時間領域境界要素法の開発と応用
３．学会等名 CMD2020計力スクウェア
４．発表年 2020年

１．発表者名 森理人，新納和樹
２．発表標題 領域変形を伴う初期値境界値問題における時間域境界要素法の安定性に対する数値的解析手法
３．学会等名 計算工学講演会
４．発表年 2021年

１．発表者名 庄子 諒，吉川 仁，高橋 徹，樫山 和男
２．発表標題 高速多重極境界要素法を用いた大規模3次元音場解析
３．学会等名 第23回応用力学シンポジウム
４．発表年 2020年

１．発表者名 庄子 諒，吉川 仁，樫山 和男
２．発表標題 吸音効果を考慮した境界要素法による時間域音場解析
３．学会等名 第25回計算工学講演会
４．発表年 2020年

１．発表者名 高橋 徹
２．発表標題 ３次元高速時間領域境界要素法に関する最近の進展について
３．学会等名 日本機械学会 東海支部第69期総会・講演会
４．発表年 2020年

１．発表者名
N. Nishimura

２．発表標題
Stability of the boundary integral equation methods for the two dimensional wave equation in time domain revisited

３．学会等名
Waves 2019（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
N. Nishimura

２．発表標題
Solution of eigenvalue problems with BEMs with applications to stability analysis of time domain BEMs for the wave equation

３．学会等名
Kinetics & BEM on the Saar（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
福原美桜

２．発表標題
2次元波動方程式の時間域境界積分方程式の安定性に関する再考

３．学会等名
第65回理論応用力学講演会

４．発表年
2019年

１．発表者名
西村直志

２．発表標題
2次元動弾性問題の時間域境界要素法とその安定性に関する検討

３．学会等名
第24回計算工学講演会

４．発表年
2019年

１．発表者名 西村直志
２．発表標題 3次元波動方程式における時間域境界要素法の定式化と安定性に関する考察
３．学会等名 第24回計算工学講演会
４．発表年 2019年

１．発表者名 高橋徹
２．発表標題 ３次元波動方程式に対する境界要素法の時間基底、安定化、高速化について
３．学会等名 日本機械学会 第32回計算力学講演会
４．発表年 2019年

１．発表者名 福原 美桜
２．発表標題 2次元波動方程式の時間域境界積分法の安定性に関する一考察
３．学会等名 日本計算工学会
４．発表年 2018年

１．発表者名 Naoshi Nishimura
２．発表標題 On the stability of boundary integral methods for the wave equation in 2D
３．学会等名 CoMFoS18（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 福原 美桜
２．発表標題 2次元波動方程式の時間域境界積分法の安定性について
３．学会等名 機械学会計算力学講演会
４．発表年 2018年

１．発表者名 西村直志
２．発表標題 波動方程式のtransmission問題における時間域境界積分法の安定性について
３．学会等名 応用数理学会
４．発表年 2018年

１．発表者名 Naoshi Nishimura
２．発表標題 Solution of eigenvalue problems for open domains with boundary element methods
３．学会等名 WCCM2018（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

—

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	高橋　徹 (Takahashi Toru) (90360578)	名古屋大学・工学研究科・准教授 (13901)	

6．研究組織（つづき）

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	新納　和樹 (Niino Kazuki) (10728182)	京都大学・情報学研究科・助教 (14301)	
研究分担者	吉川　仁 (Yoshikawa Hitoshi) (90359836)	京都大学・情報学研究科・准教授 (14301)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関