

令和 5 年 6 月 13 日現在

機関番号：14201

研究種目：基盤研究(A)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18H04092

研究課題名（和文）計算代数統計の方法の性能向上と実用化の推進

研究課題名（英文）Performance improvements of algebraic statistical methods

研究代表者

竹村 彰通（Takemura, Akimichi）

滋賀大学・役員・学長

研究者番号：10171670

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 33,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では計算代数統計の方法の性能向上と実用化を目指して研究をおこなった。特に焦点を当てた手法が、ホロノミック勾配法であり、統計学で必要とされる積分や領域確率の計算を有理式係数の偏微分方程式を用いておこなう方法である。本研究では、無線通信方式に現れる複素ウィシャート分布などについて、ホロノミック勾配法を用いた実用的な成果を得た。またチューブ法についても研究を進め、分散行列が一般の場合のウィシャート分布の裾確率についての結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ホロノミック勾配法は研究代表者が2010年頃に代数学者との共同研究の中から考案した新しい手法であり、統計学で必要とされる計算を高速かつ高精度でおこなうことのできる手法である。この方法は、統計学と代数学の双方で新たな研究テーマとなり、活発な研究が行われ、それ以前は困難とされていたいくつかの数値計算が可能となった。このような数値計算は、統計学にとどまらず様々な分野の計算に用いることができものである。

研究成果の概要（英文）：In this project, we have conducted research on performance improvements and practical implementation of methods of algebraic statistics. In particular, we focused on the method, called the holonomic gradient method, which uses partial differential equations with rational function coefficients to compute various integrals and probabilities appearing in statistics. Using the holonomic gradient method, we obtained practical results on the complex Wishart distribution, which appears in wireless communication. We also studied the tube method and obtained result on the tail probability of Wishart distribution under general covariance matrices.

研究分野：統計科学

キーワード：数理統計学 統計的推測 漸近理論

## 1. 研究開始当初の背景

計算代数統計は1990年代の終わりに Bernd Sturmfels ら(引用文献)によって開拓された分野であるが、2000年代に入り日本でも研究代表者の竹村を中心とするグループが研究を開始した。計算代数統計は統計学と代数学の双方にまたがる分野であるために、数理統計学者の他に日比孝之、高山信毅らの数学者が共同して研究進めた。そして計算代数統計の中心的な課題の一つであるマルコフ基底とトーリックイデアルの研究で多くの成果を得た。その後この共同研究の流れの中で、2010年頃に研究代表者らが提案したホロノミック勾配法(引用文献)は、非常に有望な方法となった。ホロノミック勾配法の基礎となる理論はすでに数学者によって確立されていたが、この理論は統計学ではそれまで全く知られていなかったため、この方法に基づいて統計学における標本分布論を見なすと、非常に多くの確率分布族がこの方法で扱えることがわかった。

そこで、研究代表者は「計算代数統計による統計と関連数学領域の革新」というタイトルの基盤研究(S)を申請し、2013年から2018年の5年間のプロジェクトとして採択された(2019年まで延長)。この基盤研究ではホロノミック勾配法をさまざまな統計学の問題に適用し、多くの研究成果を得た。この基盤研究の成果に基づき、本研究は「計算代数統計の方法の性能向上と実用化の推進」と題して、主にホロノミック勾配法の性能の向上と実用化について研究することとした。ホロノミック勾配法は一般的な方法であり、統計学に現れる多変量正規分布の密度関数などがホロノミック関数であることから、ホロノミック関数の満たす偏微分方程式の代数的な操作により、数値計算可能な結果が得られることが理論的に保証されている。しかしながら、代数的な操作はしばしば非常に重くなり、個別の課題について様々な工夫が必要であることがわかってきていた。

## 2. 研究の目的

本研究では、ホロノミック勾配法を用いる際に生じる以下のような一般的な課題を個別の問題について解決することを目的とした。a) 初期点の選択、b) 積分経路の選択、c) 方程式系に特異点がある場合の処理、d) 積分領域の境界に近づく時の漸近近似との整合性。ホロノミック勾配法の安定的な活用のためには、これらの問題の解決が必要とされている。これらについて図1に基づいて説明する。

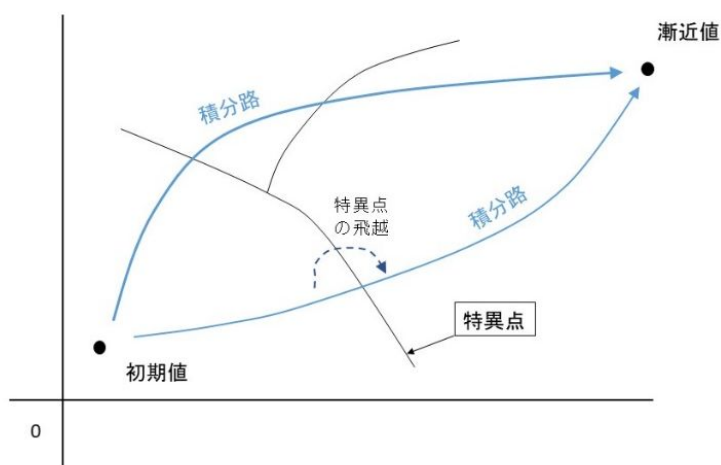


図1: ホロノミック勾配法の研究マップ

ホロノミック勾配法は、微分方程式系を数値積分によって解くための初期値を必要とする。求めたい関数及びその偏導関数は、引数を原点の付近にとり、関数の無限級数展開で求めることが

多い。しかし、実際に関数値を求めたいのは、原点からかなり離れた点であることが多い。この場合、積分路をどのようにとるかが一つの問題となる。通常は与えられた座標系で、初期点から目的点まで直線で進むことが多いが、直線上では例えば偏微分の絶対値が非常に大きくなるような場合には、そのような点を迂回するような積分路を用いる必要がある。

またホロノミック勾配法に特有の問題点として、微分方程式の分母が 0 となる特異点が現れることがある。これは、求める関数にはそのような特異点がない場合でも見られる。その場合には特異点を飛び越す工夫が必要となる。さらに、関数を評価する点が原点から非常に遠くなる場合には、数値積分の誤差が累積する可能性が高くなるため、理論的に関数の漸近的な挙動を確定しておき、その漸近値と比較して誤差を制御することも必要である。数理統計学においては、さまざまな漸近理論が研究されている。研究代表者が長年携わってきたチューブ法もそのような理論の一つで、確率分布の裾確率を近似する手法であり、これは累積分布関数の引数が無限に発散する時の挙動を示し、ホロノミック法の誤差評価にも使うことができる。

### 3．研究の方法

上の研究の目的にあげた 4 つの課題の難易度は、個別の課題によって異なる。初期値の選択においては関数の無限級数展開の収束を早めるなどの工夫を施す必要がある。例えばゾーナル多項式を用いた行列変数の超幾何関数の無限級数の計算のためには、ゾーナル多項式の計算のアルゴリズムを工夫する必要がある。また次元が高い場合に偏微分方程式系が非常に複雑となる場合には、少数の変数についてのみホロノミック法を適用し、他の変数については他の方法と組み合わせるなどの工夫も必要となる。積分路の選択の問題に関連して、原点から遠ざかるにつれて目的する関数のスケールを変換する工夫も必要である。特に漸近的な挙動が理論的に求まっているような場合には、漸近的な値で割ることによって関数の値の大きさを制御することも有効である。これらの工夫を、さまざまな問題に適用することによって、研究を進めてきた。

### 4．研究成果

本研究からは、以下のような成果が得られた。

#### (1) 無線通信分野の統計的性能評価

無線通信分野で特に MIMO と呼ばれる多入力多出力のシステムでは、信号の分布を表すモデルとして複素ウィシャート分布が現れる。特に複素ウィシャート分布の最大根が通信の性能を表す指標となるため、最大根の分布が研究されている。文献 [1] では非心行列のランクが 1 の場合に、複素ウィシャート行列の累積分布関数のホロノミック法による計算法を与えた。非心行列のランクが 1 という特殊な場合ではあるが、ウィシャート行列の次元は任意である。この場合にホロノミック法のみを用いて累積分布関数を計算しようとすると、結果は次元に依存し、次元が高くなるにつれて結果が複雑となる。そこで、累積分布関数を変形分離して、スカラーである非心度を引数とする 1 変数のホロノミック関数を分離し、この部分のみにホロノミック勾配法を適用することにより、実用的な計算方式を得た。

#### (2) 分散不均一の場合のチューブ法

研究代表者は、栗木哲氏や Jonathan Taylor 氏らとともに、長い間チューブ法により確率分布の裾確率の近似を研究してきた。これまでのチューブ法の研究は、正規確率場の分散が一定の場合についてのものであり、分散が不均一の場合への一般化は長い間の課題となっていた。ウィシャート行列について述べれば、正規確率場の分散が一定の場合とは、ウイシ

ャート行列の分散共分散行列が単位行列の場合に対応する。文献 [1] では、チューブ法を初めて分散不均一の場合に拡張した。分散が不均一になると、チューブの半径も複雑な形で変化し、結果の導出には長い時間を要した。ウィシャート分布については、この結果は分散行列が一般の場合の最大根の分布を与えるものであり、ホロノミック法の結果との比較にも使えるものである。

### (3) 行列変数の超幾何関数のためのホロノミック勾配法

行列変数の超幾何関数は、多変量正規分布に基づく基本的な標本分布に現れる重要な関数である。行列変数の超幾何関数は 1955 年に C.S.Herz により積分の形で定義されたが、その後 1960 年代にはゾーナル多項式を含む無限級数が A.T.James や A.G.Constantine より導出され、無限級数表現自体が定義と考えられるようになっていた。ゾーナル多項式の定義は群の表現論に基づく美しいものであったが、実際の数値計算は非常な困難を伴うものであった。その後 1970 年に R.J.Muirhead(引用文献 [2]) により  ${}_1F_1$  及び  ${}_2F_1$  の満たす偏微分方程式が導出されたが、微分方程式を実際に数値的に解くことはなされていなかった。この状況を打開したのが 2013 年の  ${}_1F_1$  へのホロノミック勾配法の適用であった(引用文献 [3])。そして、2018 年にはこれを  ${}_2F_1$  に拡張することに成功した(文献 [4])。  ${}_2F_1$  に対するホロノミック勾配法は、二つの自由度や分散共分散行列があまり極端な値をとらない場合には、速度の面でも精度の面でも、実用的に動くことが確認された。

### (4) 分割表の対立仮説のもとでの条件つき分布として現れる A-分布

A-分布については、マルコフ基底は研究されていたが、正規化定数自体の研究は皆無であった。正規化定数の計算には、計算代数分野で最近多くのブレイクスルーをもたらしている手法である Macaulay 型行列を活用して、効率的実行アルゴリズムを与えた(文献 [5])。以上の計算手法を基礎として、A-分布の条件付き最尤推定問題の可解条件およびホロノミック勾配法による解法を与えた。これによりモンテカルロ法や漸近理論が機能しない領域での計算が可能となった。

## <引用文献>

- P. Diaconis and B. Sturmfels. Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions. *Ann. Statist.*, **26**, 363-397. 1998.
- H. Nakayama, K. Nishiyama, M. Noro, K. Ohara, T. Sei, N. Takayama, A. Takemura. Holonomic gradient descent and its application to the Fisher-Bingham integral, *Adv. Appl. Math.* **47** (2011) 639-658. 2011
- R. J. Muirhead. Systems of partial differential equations for hypergeometric functions of matrix argument. *Annals of Mathematical Statistics*, **41**, 991-1001. 1970.
- Hiroki Hashiguchi, Yasuhide Numata, Nubuki Takayama and Akimichi Takemura. The holonomic gradient method for the distribution function of the largest root of a Wishart matrix. *Journal of Multivariate Analysis*, **117**, 296-312. 2013.

## 5 . 主な発表論文等

### [ 雑誌論文 ]

- Y. Fukasawa and A. Takemura. Holonomic gradient method for the cumulative distribution function of the largest eigenvalue of a complex Wishart matrix with noncentrality matrix of rank one. In: Holgersson T., Singull M. (eds) *Recent Developments in Multivariate and Random Matrix Analysis: Festschrift in Honour of Dietrich von Rosen*, Springer, Cham. 83-101. doi:10.1007/978-3-030-56773-6\_6. 2020.

(査読有) (オープンアクセスとしている)

S. Kuriki, A. Takemura and Jonathan E. Taylor. The volume-of-tube method for Gaussian random fields with inhomogeneous variance. *Journal of Multivariate Analysis*, **188**, 104819. doi:10.1016/j.jmva.2021.104819. 2022. (査読有)

H. Hashiguchi, N. Takayama and A. Takemura. Distribution of the ratio of two Wishart matrices and cumulative probability evaluation by the holonomic gradient method. *Journal of Multivariate Analysis*, **165**, 270-278. doi:10.1016/j.jmva.2018.01.002. 2018. (査読有) (オープンアクセスとしている)

N. Takayama, S. Kuriki and A. Takemura. A-hypergeometric distributions and Newton polytopes. *Advances in Applied Mathematics*, **99**, 109-133. doi:10.1016/j.aam.2018.05.001. 2018. (査読有) (オープンアクセスとしている)

#### [学会発表]

Holonomic gradient method for evaluation of multivariate probabilities, A. Takemura, An invited talk at the 3rd International Conference on Statistical Distributions and Applications (ICOSDA 2019), Grand Rapids, USA, October 12, 2019.

Progress of statistics and data science education in Japanese universities, A. Takemura, An invited talk at the 16th Conference of International Federation of Classification Societies, Thessaloniki, Greece, August 27, 2019.

Holonomic gradient method for multivariate distribution theory, A. Takemura, An invited talk at Multivariate and Mixed Linear Models (MMLM 2019), Bedlewo, Poland, May 1, 2019.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 A. Takemura	4. 巻 N/A
2. 論文標題 Holonomic gradient method for multivariate distribution theory	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Multivariate, Multilinear and Mixed Linear Models(Contributions to Statistics)	6. 最初と最後の頁 1-15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-75494-5_1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Satoshi.Kuriki, Akimichi.Takemura, Jonathan E.Taylor	4. 巻 vol.188
2. 論文標題 The volume-of-tube method for Gaussian random fields with inhomogeneous variance	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Multivariate Analysis	6. 最初と最後の頁 NYD
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yuta Fukasawa and A. Takemura	4. 巻 1
2. 論文標題 Holonomic gradient method for the cumulative distribution function of the largest eigenvalue of a complex Wishart matrix with noncentrality matrix of rank one	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Recent Developments in Multivariate and Random Matrix Analysis	6. 最初と最後の頁 83-101
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-56773-6_6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Takeru Matsuda and A. Takemura	4. 巻 37
2. 論文標題 Game-theoretic derivation of upper hedging prices of multivariate contingent claims and submodularity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 213-248
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-019-00394-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeyuki Sasai, Kenshi Miyabe and Akimichi Takemura	4. 巻 47
2. 論文標題 Erdos-Feller-Kolmogorov-Petrowsky law of the iterated logarithm for self-normalized martingales: a game-theoretic approach	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Annals of Probability	6. 最初と最後の頁 1136-1161
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/18-AOP1281	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Nobuki Takayama, Satoshi Kuriki and Akimichi Takemura	4. 巻 99
2. 論文標題 A-hypergeometric distributions and Newton polytopes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances in Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 109-133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aam.2018.05.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Raimundas Vidunas and Akimichi Takemura	4. 巻 77
2. 論文標題 Differential relations for the largest root distribution of complex non-central Wishart matrices	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 The 50th Anniversary of Groebner basis, edited by Takayuki Hibi, Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 411-436
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Akimichi Takemura	4. 巻 1
2. 論文標題 A new era of statistics and data science education in Japanese universities	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Japanese Journal of Statistics and Data Science	6. 最初と最後の頁 109-116
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s42081-018-0005-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 Satoshi.Kuriki, Akimichi.Takemura, Jonathan E.Taylor
2. 発表標題 The volume-of-tube method for Gaussian random fields with inhomogeneous variance
3. 学会等名 JMVA 50th Jubilee volume follow-up virtual meeting, April 20, 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 竹村彰通
2. 発表標題 健康医療のためのデータサイエンス- 滋賀県長寿の要因分析を例として
3. 学会等名 日本医療マネジメント学会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Akimichi Takemura
2. 発表標題 Holonomic Gradient Method for the Cumulative Distribution Function of the Largest Eigenvalue of a Complex Wishart Matrix with Noncentrality Matrix of Rank One
3. 学会等名 Symposium to celebrate Dietrich von Rosen 65th birthday (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Akimichi Takemura
2. 発表標題 Holonomic gradient method for evaluation of multivariate probabilities
3. 学会等名 The 3rd International Conference on Statistical Distributions and Applications (ICOSDA 2019) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 Akimichi Takemura
2. 発表標題 Progress of statistics and data science education in Japanese universities
3. 学会等名 The 16th Conference of International Federation of Classification Societies (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akimichi Takemura
2. 発表標題 Holonomic gradient method for multivariate distribution theory
3. 学会等名 Multivariate and Mixed Linear Models (MMLM 2019) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹村彰通
2. 発表標題 データサイエンス学部卒業生の人材像
3. 学会等名 2018年度統計関連学会連合大会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 竹村彰通
2. 発表標題 滋賀大学のデータサイエンス研究科構想について
3. 学会等名 2018年度統計関連学会連合大会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akimichi Takemura
2. 発表標題 New Undergraduate Departments and Programs of Data Science in JAPAN
3. 学会等名 The 10th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS10) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 竹村彰通	4. 発行年 2020年
2. 出版社 学術図書出版社	5. 総ページ数 368
3. 書名 新装改訂版 現代数理統計学	

1. 著者名 青木敏、竹村彰通、原尚幸	4. 発行年 2019年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 272
3. 書名 代数的統計モデル	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------