

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K00036

研究課題名(和文) 証明論的手法による論理定項の特徴づけ

研究課題名(英文) Characterization of the notion of logical constant via proof-theoretic methods

研究代表者

黒川 英徳 (Kurokawa, Hidenori)

金沢大学・GS教育系・准教授

研究者番号：30710230

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の成果として以下のものを挙げる事ができる。一つは、一般化されたシーケント計算(特にネステッド・シーケント)による論理定項の特徴づけとして、「反映原理」による定式化を行い、当該の体系に関して証明論の基本定理であるカット除去定理を証明したというものである。この他にもその他の多くの非古典論理に関するシーケント計算の体系に関してカット除去を証明した。もう一つは、形式体系において展開される(論理定項を含む)論理的、数学的な概念と我々が自然言語を用いて理解している非形式的な概念との関係に関するクライゼルの「非形式的厳密さ」という方法論的概念について、体系的な解明を行なったというものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の成果の学術的意義の一つは「論理定項とは何か」という論理学の哲学に関する根本問題の一つに証明論の立場から一定の解答を与えたということである。もう一つはその解答を得る中で関連したいくつかの論理体系に関して、証明論の基本定理であるカット除去定理という純粋に技術的(つまり数学的)な結果を得ることができたことである。また、クライゼルの「非形式的厳密さ」の概念の探究により、「形式的であるとはどのようなことか」という数理論理学の根本問題への解答を与えることに一定の貢献することができた。社会的意義としては、計算機科学での研究方法に間接的に影響を及ぼすという形での当該分野の技術的発展への貢献がある。

研究成果の概要(英文)：We can summarize the outline of the main research achievements based on this grant as follows. First, we gave a characterization of the notion of logical constant in a proof-theoretic manner in the style of "the principle of reflection", by using a framework of certain generalized sequent calculi (in particular, nested sequents). We have justified the idea by proving the cut-elimination theorems for the sequent calculi. In relation to these results, we have also proven the cut-elimination theorems for a whole bunch of generalized sequent calculi for various non-classical logics. Secondly, we gave a systematic interpretation and clarification of Kreisel's methodological concept called "informal rigour." Informal rigour was introduced in order to understand the relationship between logical and mathematical concepts (including logical constants) in a formalized system and their informal counterparts, which we usually understand by using natural languages.

研究分野：哲学、論理学

キーワード：論理定項 証明論的意味論 反映原理 シークエント計算 非古典論理 クライゼル informal rigour
竹内外史

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

本研究当初の背景は、次のようなものであった。数理論理学の基礎において論理的推論の正しさを特徴づける際、「論理定項」の概念は極めて重要な役割を果たす。しかしながら、伝統的なモデル理論的な論理的帰結(妥当性)の概念を特徴づける際には、何を「論理定項」と考えるかはすでに与件とし、その上で論理的帰結の概念の定義が与えられている。その結果、そもそも「論理定項」とは何かという問題については、深い理解が得られていなかった。また、モデル論的意味論と比べると比較的最近になってから発展した「証明論的意味論」に基づいて論理的推論の妥当性を特徴づける試みも既に存在していた。しかしながら、このアプローチでは「論理定項」の意味を、自然演繹における推論規則(導入規則・除去規則)によって「論理定項」の意味が与えられ得るという考え方に基づいて議論がなされており、やはり「論理定項」とは何かということについて一般的な議論をするよりも、直観主義論理をはじめとする狭い範囲の論理に関し、「論理定項」としての地位がすでに確立しているものについて、その意味を証明論の観点から与えるという点に強調点があった。そのため、一般的な観点から「論理定項」とは何かを証明論的意味論の観点から包括的に問題にするという試みはほとんど存在していなかった。

2. 研究の目的

上記の背景に鑑み、本研究では当初、従来存在していた証明論的意味論の枠組みを深化させる形で、古典論理、直観主義論理を含みつつ、より広範な非古典論理まで含めて、証明論の観点から(自然演繹よりもより広い範囲の非古典論理を扱うのに適した)シークエント計算、またさらにさらに「一般化されたシークエント計算」という道具立てを用いて論理定項の一般的な特徴づけを与えることを目的としていた。

しかしながら研究を進める仮定で、自然言語を使ってはいけるが、十分に正確な意味での演繹的推論を行うことを要求されるような、数学をはじめとする演繹的科学における「論理的な」語彙を使用した「非形式的」な推論とのリンクが本研究での論理定項の特徴づけという研究目的のために不可欠であるという洞察を得た。そのため、途中から非形式的な推論(あるいはより広く非形式的な数学的概念)の取り扱いに研究の目的を拡張し、論理体系を含めてそもそも形式的な理論によって非形式的な概念を表現する場合、その理論の十全性(adequacy)はいかにして表現されるのかという問題に解答を与える(あるいはそうした解答を与えることを目的として考案された、既存の理論的小試みを批判的に検討する)ということをも研究の目的に含めることになった。

3. 研究の方法

本研究では当初、シークエント計算の枠組みを一般化したもの(ネステッド・シークエント、ラベル付きシークエントなど)を使って、シークエント計算に基づく観点から、論理定項の一般的な特徴づけをすることを試みた。その際、元々シークエント計算の枠組みでなされていたG・サンピンらの「反映原理」と呼ばれる手法を基本的な手法として採用した。これはメタ言語的に使用されているオペレーションを使用して、対象言語における論理定項の特徴づけを与えるというものである(サンピン等はそのような説明をしていない。これは我々の立場からの解釈である)。本研究ではサンピンらのこうした試み(彼らの試みは他にも多く存在している類似の試みの一つであるが、我々の目的のためには最も適したものと考えられた)を上記で述べたネステッド・シークエントをはじめとする、一般化されたシークエント計算の枠組みを使用することによってさらに一般的なものに拡張することを目標とした。またこうした研究の一環として、証明論的意味論において重要な役割を果たす基本的な概念をシークエント計算の枠組みを用いて批判的に検討することも含まれる。それに加え、基本的な概念を論理定項の一般的特徴づけという目的のための準備として、さまざまな非古典論理の一般化されたシークエント計算(ネステッド・シークエント、ハイパーシークエント、ラベル付きシークエントなど)について、証明論における基本定理であるカット除去定理を証明した(これは上記のような論理定項の証明論的手法による一般的特徴づけという目的のためにはこれらの技術的成果が不可欠なためである)。

さらに、上記の研究目的の拡張により、本研究の広範においてはこの方法だけでなく、非形式的な概念と形式的に扱われた概念の間の関係を議論する手段として、歴史的な文献を解釈し、検討することも行なった。具体的にはクライゼルの「非形式的厳密さ」と呼ばれる方法論的概念に関する論文、数学の基礎概念について議論している竹内外史、また上記の研究を進めるための準備作業論理的帰結の概念に関する哲学的議論に関するサーヴェイなどを行なった。

4. 研究成果

本研究の研究成果としては以下のようなものがある。

(1) ネステッド・シーケントを使用し、G. サンピン等が行なった「反映原理」による論理定項の特徴づけを行なった。具体的には、まず広範囲の非古典論理について「定義的等式」を「解く」ことによって、シーケント計算のスタイルの推論規則が導かれることを示した。(推論規則は単に「約定」によって定まるものではなく、推論規則自体がある種の手続きを経て論理的に意味のある形で定式化されるものであること、しかもその際に必要とされるのは基本的にカット規則のみであることをこの議論は示している。)その後、カット除去定理を示した。このことはこのようにして「反映原理」によって定式化されたネステッド・シーケントにおける論理定項がいわば「well-defined」であることを示している。これらの成果は(結果自体が膨大なため)現在のところ部分的にのみ論文になっている。その既に出版された論文においては、こうした形で特徴づけられた論理定項がベルナップによる古典的な論理定項の特徴づけ(同一性と保守的拡大性)の条件を十分に満たすことが示されている。とはいえこの論文は、この結果はベルナップの条件を確認するのではなく、むしろベルナップの条件の十全性(adequacy)こそが再考されるべきものであるということを最終的には主張している。

(2) 論理定項の(一般化されたシーケント計算にもとづく)証明論的特徴づけという目的のための準備作業として、これまで証明論的意味論においてしばしば議論されてきた、ダメットにより導入された「stability」の概念について検討した。この研究では、具体的にはもともと自然演繹の体系について導入された「stability」の概念をシーケント計算の観点から定式化し直すところのようになるかということを検討したが、結果としてシーケント計算に基づくことで自然演繹の体系では表現することができなかった「stability」の双対概念を発見し、かつシーケント計算で「stability」の概念を特徴づける際、直観主義的な含意を含めて「stability」を特徴づけるには伝統的なシーケント計算では足りず、higher-level シーケント計算と呼ばれるものが必要とされることを発見した。この結果はすでに学会発表の形で公表されているが、論文の発表はまだこれからである。また、このプロジェクトを進める際、「stability」という概念の先行研究に関して、重要な概念的区別はまだ十分に焦点が当てられていないということに気づいたため、その点についても継続的に研究を行なった(この論点については共同研究者による学会発表がすでに行われている)。なお、この研究はアルベルト・ナイボ、マティア・ペトロロとの共同研究である。

(3) 論理定項の証明論的特徴づけという主要目的のための準備作業として、いくつかの一般化されたシーケント計算についてカット除去定理を証明した。それらの中には、以下のようなものが含まれる。ラベル付きシーケント計算による relevant logics のカット除去定理、線形論理の exponential operator を S5 に拡張した論理を考え、その体系のハイパーシーケント計算についてのカット除去定理を証明し、またその論理について証明論理ヴァージョンを定式化し、現実化定理を証明した。なお前者はサラ・ネグリとの、後者は串田裕彦との共同研究である。

(4) 上で述べた、非形式的な文脈における「論理」の使用と形式化された文脈での「論理」の使用の間の関係を明らかにし、論理の形式化というものが単に不正確なものを正確なもので置き換えたというだけでなく、形式的な概念には我々が非形式的な形で理解していた論理的な概念(非形式的だからと言って必ずしも不正確であるということの意味しているわけではないということに注意)を十全な(adequate)な形で理論化することができる可能性があるという論理学(あるいは数学基礎論一般における)方法論的議論をクライゼルが1960年代に発表した論文から抽出、定式化し、クライゼルが与えているケース・スタディを現代的な立場から再構成した。このプロジェクトに関して発表された成果には、完全性定理の意義についてクライゼルの立場から議論した extended abstract や、論理的帰結の概念についてのサーヴェイ論文などが含まれる。(この研究に関してはすでに論文になっており、インターネット上のプレプリントサーバにはすでに発表されているが、著者の責任外の編集に関する問題により現在のところ出版が遅れており、正式な発表媒体ではまた発表できていない。なお、この研究はワルター・ディーンとの共同研究である。)

このプロジェクトからさらに派生した研究として以下の研究を行い、それぞれに成果を得た。(ただし、どちらもまだ論文の形では出版されていない。)一つは、クライゼルの「構成の理論」の現代的な再構成という研究である。これは以前の研究の継続であるが、クライゼル-グッドマンのパラドックスと呼ばれる矛盾について、グッドマンの論文における矛盾の導出に問題があることを指摘したものである。二つ目においては、直観主義数学における量子子の解釈と深く関係する直観主義的解析学についての研究である。クライゼルとマイヒルによる公表されている議論のやり取りの背景になっているいくつかの論文について、その解釈、再構成を行なった。三つ目は、やはり構成主義解析学の基礎に関連して、構成的実数の概念にクライゼルの非形式的厳密性の概念を適用したものである。

(5) これらの研究に加え、日本の数理論理学研究の草分けにして現在までのところ最重要人物である竹内外史(2017年没)の残した哲学的論文に基づいて竹内外史の論理思想について研究

した。とりわけ集合の概念について竹内が残した議論を取り上げ、高階述語論理の証明論の立場から竹内がいかにして集合の概念に関する概念分析を与えようとしていたのかということ明らかにした。数学の基礎を考える際に、「論理」「証明」といった概念がどのような役割を演じることになるのかという観点から、証明の概念、論理の概念について検討したものであり、本研究の中ではむしろ派生的な意味をもつが、高階論理の証明論において「量子子」の果たす役割を研究するものであり、広い意味で証明論的な手法による論理定項の特徴づけと関係する研究であると言える。なお、この研究は論文の形ですでに発表されている。

全体として、本研究におけるこれらの研究成果は、証明論的な観点からの論理定項の概念の理解を前進させるものであり、一般化されたシークエント計算を用いた哲学的な研究という点で多くの独創性を含むだけでなく、技術的数学的な結果も含むものとして純粋にテクニカルな観点(つまり数理論理学的な観点)からも意味のあるものであると言える。それに加え、論理とは何かという大きな哲学的問題についても証明論的な観点からの洞察を与えるものであると言える。

また、後半に行なったクライゼルの竹内についての研究では、哲学的、方法論的な観点から論理学研究の進展に貢献するものであるばかりでなく、論理思想史の観点からも、論理学における「形式化」(これは、チャーチ、チューリング等が分析した意味での「形式化」という概念のことを言っており、計算機科学の基盤ともなっている「チャーチ=チューリングの提唱」の中で想定されている意味での「形式化」であることに注意して欲しい)とは何か、我々が形式化以前にもっている非形式的な概念と形式化された概念とはどのような関係にあるのか、あるいはあるべきなのかということに関し、クライゼルの *informal rigour* という、従来あまり注目されていなかった(あるいは、言葉だけが有名で、その内容については体系的吟味が与えられたことなかった)概念について、これまでになく詳細な検討をしたことによって、論理学、数学基礎論に関する哲学的な議論においてだけでなく、数理論理学という学問がどのようなものであり、またどのようなものであるべきなのかという問題に解答を与えることへの貢献も行うことができたと思われる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 黒川英徳	4. 巻 -
2. 論文標題 「完全性定理再訪」	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 日本数学会2019年度秋季総合分科会数学基礎論及び歴史分科会アブストラクト	6. 最初と最後の頁 57-69
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hidenori Kurokawa, Hirohiko Kushida	4. 巻 30
2. 論文標題 Resource sharing linear logic	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Logic and Computation	6. 最初と最後の頁 295-319
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/logcom/exaa013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hidenori Kurokawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Takeuti's early view of the concept of set	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Springer Proceedings of Mathematics and Statistics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hidenori Kurokawa	4. 巻 -
2. 論文標題 On the semantic concept of logical consequence	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Artificial Intelligence	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hidenori Kurokawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Belnap's criteria for logical constants and the principle of reflection	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 41st International Wittgenstein Symposium	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 黒川英徳
2. 発表標題 On the methodology of informal rigour: applications to the concept of "system"?
3. 学会等名 科学基礎論学会 シンポジウム 2022 年度総会と講演会 (招待講演)
4. 発表年 2022年 ~ 2023年

1. 発表者名 Hidenori Kurokawa
2. 発表標題 Takeuti's view of a proof-theoretic analysis of the concept of set
3. 学会等名 Proofs, Computation and Meaning The University of Tübingen (on-line) (国際学会)
4. 発表年 2022年 ~ 2023年

1. 発表者名 Hidenori Kurokawa
2. 発表標題 Takeuti's view of a proof-theoretic analysis of the concept of set
3. 学会等名 Mini-workshop at IHPST (The University of Paris, Pantheon-Sorbonne) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Walter Dean and Hidenori Kurokawa
2. 発表標題 “On the Methodology of Informal Rigour: Set Theory, Semantics, and Intuitionism”
3. 学会等名 Midwest PhilMath Workshop (University of Notre Dame) (国際学会)
4. 発表年 2020年～2021年

1. 発表者名 Hidenori Kurokawa
2. 発表標題 Labelled sequent calculi for relevant logics
3. 学会等名 Fourth Workshop on Mathematical Logic and its Applications (JAIST) (国際学会)
4. 発表年 2020年～2021年

1. 発表者名 黒川英徳
2. 発表標題 完全性定理再訪
3. 学会等名 日本数学会 2019年秋季総合分科会 数学基礎論および歴史分科会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hidneori Kurokawa
2. 発表標題 On Takeuti's view of the concept of set
3. 学会等名 The congress of logic, methodology and philosophy of science and technology
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hidenori Kurokawa
2. 発表標題 On the semantic concept of logical consequence
3. 学会等名 The workshop of logic and engineering of natural language semantics (LENLS) 19
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hidenori Kurokawa, Alberto Naibo
2. 発表標題 Stability in sequent calculus
3. 学会等名 The third conference on proof-theoretic semantics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hidenori Kurokawa
2. 発表標題 On Takeuti's view of the concept of set
3. 学会等名 Workshop in philosophical logic and philosophy of logic (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hidenori Kurokawa
2. 発表標題 On Takeuti's view of the concept of set
3. 学会等名 Symposium on advances in mathematical logic (SAML) 2018 Takeuti Memorial Symposium (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hidenori Kurokawa
2. 発表標題 Belnap's criteria of logical constants and the principle of reflection
3. 学会等名 The 41st International Wittgenstein Symposium (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hidenori Kurokawa
2. 発表標題 Squeezing reals
3. 学会等名 日本科学哲学学会
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Hidenori Kurokawa & Sara Negri, (ed. Adrian Rezus)	4. 発行年 2020年
2. 出版社 College publications	5. 総ページ数 -
3. 書名 Contemporary Logic and Computing, Chapter "Relevant logics: from semantics to proof systems"	

〔産業財産権〕

〔その他〕

On the methodology of informal rigour https://arxiv.org/abs/2104.14887

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	The University of Warwick			
フランス	The University of Paris I			
ポルトガル	The University of Lisbon			
英国	University of Warwick			
フランス	University of Paris I, Pantheon-Sorbonne			
ブラジル	Federal University of ABC			
英国	University of Warwick			
フランス	University of Paris I Pantheon Sorbonne			
ブラジル	the Federal University of ABC (UFABC)			
フランス	The University of Paris I			
ブラジル	UFABC			
フィンランド	The University of Helsinki			
英国	The University of Warwick			
英国	University of Warwick			
フランス	University of Paris I			