

令和 3 年 6 月 24 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K01543

研究課題名(和文) 情報量を用いた停止時による非定常時系列の統計的逐次解析

研究課題名(英文) Statistical Sequential Analysis of Non-stationary Time Series using Stopping Times Based on Information

研究代表者

永井 圭二 (Nagai, Keiji)

横浜国立大学・大学院国際社会科学研究院・教授

研究者番号：50311866

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：バブルや感染拡大の発生などの緊急事態を迅速に検出するため、自己回帰過程に対する逐次単位根検定と、移民項を含む場合と含まない場合の分枝過程に対する逐次臨界性検定を開発した。観測されたフィッシャー情報に基づく停止時刻を用いて、爆発的なケースを含む仮説に対するZ検定(正規分布に基づく検定)を導出した。停止時間と逐次Z検定の結合極限は、時間変更されたブラウン運動によって駆動される3/2次元ベッセル過程で特徴づけられる。Z検定は最強力不変逐次検定であることがわかり、また、安定的な対立仮説の下でサンプリングコストを削減し、爆発状態を迅速に検出するいくつかの逐次検定を提供した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非エルゴード的問題とされる自己回帰過程に対する単位根検定と、移民項を含む場合と含まない場合の分枝過程に対する臨界性検定に対し、観測されたフィッシャー情報に基づく停止時刻を用いて逐次解析の手法を提案した。局所仮説(安定的な場合と爆発的な場合を含む)に対するZ検定を導出した。停止時間と逐次Z検定の結合極限は、時間変更されたブラウン運動によって駆動される3/2次元ベッセル過程で特徴づけられ、結合分布および同時結合ラプラス変換を数学的に求めた。Z検定は最強力不変逐次検定であることがわかり、安定的な対立仮説の下でサンプリングコストを削減し、爆発状態を迅速に検出するいくつかの逐次検定を提供した。

研究成果の概要(英文)：In order to quickly detect emergencies such as bubbles and disease outbreaks, we developed sequential unit root tests for autoregressive processes and sequential criticality tests for branching processes with and without immigration. Using stopping times based on observed Fisher information, we derived Z-tests (tests based on normal distribution) for hypotheses involving explosive cases. The joint limit of the stopping time and the sequential Z-test is characterized by a 3/2-dimensional Bessel process driven by time-changed Brownian motion. the Z-test was found to be the uniformly most powerful invariant sequential test. We also provided some sequential tests reducing sampling cost under stable alternatives and detecting explosive states quickly.

研究分野：非エルゴード的確率過程の統計解析

キーワード：非エルゴード的問題 自己回帰過程 単位根検定 分枝過程 臨界性検定 観測されたフィッシャー情報量 結合ラプラス変換 ベッセル過程

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

金融危機は、常に経済・社会に大きなコストをもたらす。したがって、このような緊急事態を早期に発見することは、政策立案者や投資家にとって非常に重要である。一般的に、研究者は金融危機をモデリングするために爆発的なプロセスを採用し、爆発的な対立仮説に対して単位根検定を考える。本研究では、爆発的な状態を素早く検出するために、停止時刻をもちいた逐次検定の手法を提案する。また、研究開始当初には起きなかったことであるが、ウイルスの感染拡大も同様にまた爆発的な対立仮説に対して臨界性検定を考えることができる。単位根検定と同等な手法で停止時刻をもちいた逐次検定の手法を提案する。

2. 研究の目的

本研究では、一般線形過程を誤差項に持つ和分過程などの非定常時系列が、オンラインで観測される場合を想定し、情報量に基づく停止時刻を用いて統計的逐次解析の理論を展開する。そこでは、単位根検定、和分次数の決定、モデルの特定化、パラメータの推定といった問題に対して、観測された Fisher 情報量に基づく停止時刻を用いて、統計的逐次解析を展開する。そして、通常のアフラインでの観測された時系列解析では得られなかった局所対立仮説にたいする LAN (局所漸近正規, local asymptotic normality) のような最適性、停止時の期待値や分散などの OC (operating characteristics; 動作特性) の計算法を、確率解析の手法を用いて解明する。

Fisher 情報量をもちいた停止時を用いて、AR(1) に関する統計的逐次解析を提案したのは Lai and Siegmund (1983) である。彼らは、誤差項が $i.i.d. (0, \sigma^2)$ の定数項のない AR(1) モデルに対し、正規誤差を想定して求められる自己回帰係数の (観測された) Fisher 情報量 (observed Fisher information) を考え、観測された Fisher 情報量が事前に設定した水準 I に達した時点でサンプリングを止める、停止時 (I) を考えた。その際、AR(1) がたとえ単位根過程 (すなわちランダムウォーク) であっても、Fisher 情報量の事前水準 I を大きくしたとき、サンプルサイズ (I) の t 統計量は漸近的に標準正規分布に近づくことを示している。通常のアフライン観測の下での最小二乗推定量から作られる DF 検定 (Dickey-Fuller test) の t 統計量の漸近分布は標準正規分布にはならず、誤差項の和であるランダムウォークが作るブラウン運動で表記される。

本研究の問題の出発点として、AR(p) がオンラインで観測される場合を想定する。単位根を持つ可能性がある場合を考え、通常固定サンプルサイズと異なり、観測された Fisher 情報量で定義された停止時刻を使ってサンプルサイズを決め、停止時刻で ADF 検定 (augmented Dickey-Fuller test; 拡張 ADF 検定) を行う。

ここで重要な点は、通常のアフラインの場合の ADF の検定統計量は DF 検定と同様に漸近的には非正規であることに対し、オンラインサンプリングで単位根に関する Fisher 情報量に基づく停止時を用いた ADF 検定の検定統計量は漸近正規性を有するという点である。この事実は研究代表者が代表者を務めた基盤研究(C)「確率解析の手法を用いた統計的逐次解析の理論とその応用」(課題番号:15K03395, 2015-2018)において、京都工芸繊維大学人見光太郎氏と京都大学西山慶彦氏との研究により得られた。さらに重要な点は、アフラインの DF 検定も ADF 検定も最適性をもちあわせていないが、局所パラメータを導入した場合観測された Fisher 情報量に基づく停止時を用いた拡張 DF 検定は、極限ではブラウン運動 (Brownian motion) と OU 過程 (Ornstein-Uhlenbeck process) の尤度比検定になっており、観測された Fisher 情報量でサンプリングをとめることで LAN の性質を持っていることも確認できる。また、停止時の期待値や分散などの OC は DDS ブラウン運動 (Dambis-Dubins-Schwartz Brownian motion) を使うことで Bessel 過程の推移密度関数を用いて求められる。(DDS ブラウン運動および Bessel 過程については Revuz and Yor (1999) 参照)。

本研究課題の核心は、今までおこなってきた単位根検定の研究をもとに、非定常 AR(p) などの一般線形過程を誤差にもつ自己回帰モデルの次数 p の同定、パラメータの推定、変化点の探索といった問題を観測された Fisher 情報量を用いた停止時で統計的逐次解析を展開し、移民項を有する場合と有さない場合の分枝過程の臨界性検定に拡張することである。

3. 研究の方法

統計的逐次解析に関しては、局所パラメータを持つ AR(1) については Lai and Siegmund (1983, Annals of Statistics) が提案したフィッシャー情報量に基づく停止時刻を使って時間変更を行うと、Dickey-Fuller 検定統計量は、時間変更されたブラウン運動 (time-changed Brownian motion)、別名 DDS (Dambis-Dubins-Schwartz) ブラウン運動であらわされ、 Z 検定統計量となる。また、尤度比過程はドリフト付きブラウン運動の尤度比過程となり局所漸近正規性 (local asymptotic normality; LAN) が得られる。停止時刻は DDS ブラウン運動によって駆動される。

3/2 次元の Bessel 過程であらわされ、Z 統計量と停止時刻の極限結合分布および極限結合ラプラス変換が求められることができ、その数値計算可能な表現が Pitman-Yor のベッセル橋(Bessel bridge)の理論を用いて計算できる。本研究代表者は人見氏、西山氏、および陶氏との共同研究において、停止時刻に打ち切り (truncation or censoring) を導入することによって、Lai and Siegmund の停止時刻がしばしばもたらすオーバーサンプリング (過度に大きなサンプルサイズになってしまうこと) の問題を回避するも成功している (62nd ISI World Statistics Congress 2019 で報告)。

また、局所パラメータを持つ移民項を有する一階のゴルトン=ワトソン分枝過程(Galton-Watson branching process)についても子孫平均の観測されたフィッシャー情報量(observed Fisher information of the offspring mean)に基づく停止時刻を使って時間変更を行うと、臨界性検定統計量は DF 係数検定統計量と同様に時間変更されたブラウン運動、つまり DDS(Dambis-Dubins-Schwartz)ブラウン運動であらわされ、Z 検定統計量となる。同様に、尤度比過程についてもドリフト付きブラウン運動の尤度比過程となり、局所漸近正規性(local asymptotic LAN) と一様最強力不変検定(uniformly most powerful invariant test)の性質が得られる。停止時刻は DDS ブラウン運動によって駆動されるある次元の Bessel 過程であらわされ、Z 統計量と停止時刻の極限結合分布および極限結合ラプラス変換が求められることができ、その数値計算可能な表現が Pitman-Yor のベッセル橋の理論を用いて計算できる。停止時刻に打ち切りを導入することによって、フィッシャー情報に基づく停止時刻がたらすオーバーサンプリングの問題も解決できる。

本研究代表者は、人見光太郎氏、西山慶彦氏、および陶俊帆氏とともに、オンラインで逐次観測される時系列に関して、AR(1) に対する DF 検定、一般線形過程を誤差に持つ単位根過程に対する Phillips 検定、AR(p)に対する ADF 検定、の3つの単位根検定を統計的逐次解析の手法を用いて理論研究を行った。下記の論文[1]では、Lai and Siegmund (1983) による非定常な場合を含む AR(1) の逐次推定をベースに、DDS ブラウン運動と Bessel 過程であらわされる AR(1) の逐次単位根検定の理論を得た。さらに Z 検定統計量と停止時刻の同時密度関数をもとめ、Z 検定統計量を単純に利用した場合におこるオーバーサンプリングの問題を回避する停止時を打ち切る手法を確立したことも重要である。その後理論の中核となる AR(p) の単位根検定の LAN の性質と棄却域、パワー、停止時のモーメントといった OC の理論値を得た。本研究では Lai and Siegmund が自己回帰過程で行った研究と我々の研究を、ゴルトン=ワトソン分枝過程にまず展開し、それを多次元 p 次のゴルトン=ワトソン分枝過程まで拡張する。

4. 研究成果

2018 年度の研究では、論文[1]で AR(1) の帰無仮説の単位根の存在に対して、局所対立仮説(いわゆる near unit root) を考えた。そのさい、観測されたフィッシャー情報量に基づいた停止時刻を用いると DF の係数検定統計量は Z 統計量となり、OU 過程の尤度比過程は LAN の形をもつ。すなわち Lai and Siegmund がやったように自己回帰係数の観測された Fisher 情報量で停止時 $N(c)$ を定めると、自己回帰係数パラメータを $1 - 1/c$ としたとき対数尤度比は局所漸近正規となる、したがって、局所パラメータ に対し一様最強力検定となることを示した。また 2018 年度の学会発表では、停止時刻の極限分布が、帰無仮説と局所対立仮説のそれぞれの下で DDS ブラウン運動と Bessel 過程で表現されることを示し、OC を計算し、シミュレーション結果に非常によく合うことをみた。加えて、p 階の自己回帰過程に対し、観測されたフィッシャー情報量によって定義する停止時刻を用いて、統計的逐次解析の理論構築を行った。具体的には、定常な p 階の自己回帰過程についての統計的逐次推定、p 階の自己回帰過程の局所対立仮説に関する逐次単位根検定、の2つの理論を構築した。停止時刻での統計量に対し、従来の統計的逐次手法は更新定理を用いて解析してきた。本研究では、ブラウン運動への収束する汎関数中心極限定理を用いて、停止時刻および逐次統計量を解析する手法を提案し、非定常時系列に対する単位根検定では時間変更とベッセル過程で解析できることを示した。

2019 年度は 8 月に Kuala Lumpur で行われた世界最大の統計学関連の国際会議 The 62nd ISI World Statistics Congress (主催: International Statistical Institute) において 2 つの研究発表を行った。また、2019 年 09 月に滋賀大学で行われた統計関連学会連合大会 (主催: 日本統計学会等 6 学会) においても 2 つの研究発表を行った。加えて 2020 年 01 月に一橋大学でおこなわれた関西計量経済学研究会 (主催: 関西計量経済学研究会) において 2 つの研究発表をおこなった。それらで発表した内容は以下のとおりである。まず、フィッシャー情報を用いた停止時刻をもちいて DF 検定統計量 (逐次検定統計量) を評価するという方法に加えて、停止時そのものを単位根検定統計量とする方法を提案した。これは、非常に早く止まるという特徴があり、パワーは低いものの早期のアラートを発するという点で有用である。また、逐次検定統計量のオーバーサンプリングを回避するため、停止時刻の帰無における右側 2.5% 分位点を上限として、刈込停止時刻を使って逐次検定統計量を構成する方法を提案した。それらの新しい検定方法の動作特性を計算するために、逐次検定統計量と停止時の結合密度関数と結合ラプラス変換を Bessel 過程と Bessel Bridge の時間変更によりもとめた。これらにより、パワーと結合モーメントが特殊関数によって求められる。つづいて、非逐次の

DF 検定のパワーを正規分布から求める簡単で正確な方法を発見した。また、和分過程の次数の逐次探索と p 次の自己回帰過程の単位根逐次検定についても研究を行った。

2020 年度は経済時系列におけるバブルの発生と感染症におけるパンデミックの発生に対し、それぞれ自己回帰過程と分枝過程によってモデリングを行い、非エルゴード的な問題という共通の数学的構造が現れることに着目し、統計的逐次解析の手法を適用した。バブルの発生に関するモニタリング問題に対しては、一般線形過程を含むエルゴード定常な誤差項をもつ単位根過程、または安定的な局所単位根過程を帰無仮説として、対立仮説を爆発的な局所単位根過程とする検定問題を考えた。また、パンデミックの発生に対しては二次感染者数の分布を負の二項分布を含むべき級数分布を考え、基本再生産数が 1 を超えるかどうかの検定問題を考えた。モニタリング問題としてとらえるのでランダムな停止時をもちいる逐次検定の方法を提案し、フィッシャー情報量に基づいた停止時刻で評価した検定統計量を提案した。それは停止時点での尤度比検定と同等となり局所漸近正規の形をもつ。すなわち局所パラメータに対する対数尤度比は帰無においてはブラウン運動、対立においてはドリフト付きのブラウン運動となる、したがって、局所パラメータに対し停止時刻までに行う任意の確率化検定を含む検定の中で一様最強力な検定となることが示された。また、停止時刻の極限分布が、帰無仮説と局所対立仮説のそれぞれの下でベッセル過程で表現されることを示し、動作特性を理論的に計算し、シミュレーション結果と整合的であることをみた。これらの結果は、 p 階の自己回帰過程に関する単位根検定に関わる統計的逐次解析の動作特性と、ゴルトン=ワトソン分枝過程に関する臨界性検定に関わる統計的逐次解析の動作特性に関する、Mathematica をもちいた数値計算とシミュレーションについての 2 つの研究成果として、世界最大級の 2 つの統計学会 Bernoulli と ISI の合同統一大会において報告された。それらで $AR(p)$ に関する単位根検定に関わる統計的逐次解析の OC の計算方法を確立し、ゴルトン=ワトソン分枝過程に関する臨界性検定に関わる統計的逐次解析の OC の計算方法も同時に確立したと考える。また、OU 過程と CIR 過程はともに Hull-White 過程であることを示し、Hull-White 過程の尤度比過程において二乗 Bessel 過程とそのリーマン積分が現れ、フィッシャー情報による時間変更で DDS ブラウン運動とそれにより駆動される Bessel 過程が出てくることを確認した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 0件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 K. Nagai, Y. Nishiyama, and K. Hitomi	4. 巻 1003
2. 論文標題 Sequential Unit Root Test	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 KIER DISCUSSION PAPER SERIES	6. 最初と最後の頁 1,27
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 J. Tao, and K. Nagai	4. 巻 2020-CEGS-05
2. 論文標題 Sequential tests for criticality of branching process with immigration	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discussion Paper Series, CEGS, Yokohama National University	6. 最初と最後の頁 1,14
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 K. Hitomi, K. Nagai, Y. Nishiyama, and J. Tao	4. 巻 1060
2. 論文標題 Joint Asymptotic Properties of Stopping Times and Sequential Estimators for Stationary First-order Autoregressive Models	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 KIER DISCUSSION PAPER SERIES	6. 最初と最後の頁 1,17
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 1件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 [1]K.Nagai, Y.Nishiyama, K. Hitomi, and J. Tao
2. 発表標題 Monitoring Unit Root in Sequentially Observed Autoregressive Processes against Local-to-unity hypotheses ”,
3. 学会等名 62nd ISI World Statistics Congress 2019, International Statistical Institute (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Nagai, Y. Nishiyama, K. Hitomi, and J. Tao
2. 発表標題 Joint Asymptotic Normality of Stopping Times and Sequential Estimators in Monitoring Autoregressive Processes
3. 学会等名 62nd ISI World Statistics Congress 2019, International Statistical Institute (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Y. Nishiyama, Kohtaro Hitomi, Keiji Nagai
2. 発表標題 Sequential Unit Root Test
3. 学会等名 Workshop on Recent Progress in Time Series in honour of Peter Robinson (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Nagai, K. Hitomi, Y. Nishiyama, J. Tao
2. 発表標題 The relationship between Dickey-Fuller test and Sequential unit root test for first-order autoregressive model
3. 学会等名 2019年度統計関連学会連合大会 / Japanese joint statistical meeting 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Nagai, Y. Nishiyama, K. Hitomi, J. Tao
2. 発表標題 Sequential detection of the order of integration for pth-order autoregressive mode
3. 学会等名 2019年度統計関連学会連合大会 / Japanese joint statistical meeting 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Junfan Tao
2. 発表標題 Sequential Estimation for Strongly Stationary AR(p) Process
3. 学会等名 日本統計関連連合大会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Keiji Nagai
2. 発表標題 Sequential Unit Root Test in AR(p) Model
3. 学会等名 日本統計関連連合大会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Nagai, Y. Nishiyama, K. Hitomi, and J. Tao
2. 発表標題 Operating characteristics of sequential unit root tests obtained from the Bessel bridges
3. 学会等名 Bernoulli-IMS One World Symposium 2020 (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 K. Nagai, K. Hitomi, Y. Nishiyama, and J. Tao
2. 発表標題 The role of Bessel processes on the sequential test for a unit root in autoregressive process and criticality in branching processes
3. 学会等名 Bernoulli-IMS One World Symposium 2020 (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 K. Nagai, K. Hitomi, Y. Nishiyama, and J. Tao
2. 発表標題 Sequential test for the criticality of branching processes
3. 学会等名 日本統計関連連合大会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------