

令和 3 年 6 月 15 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2020

課題番号：18K01547

研究課題名（和文）モーメント制約モデルのベイズ推定のための大標本理論

研究課題名（英文）Large Sample Theory for Bayesian Estimation of Moment Restriction Models

研究代表者

末石 直也（Sueishi, Naoya）

神戸大学・経済学研究科・教授

研究者番号：40596251

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、経験尤度をパラメトリックな尤度の代わりとして用いるベイズ経験尤度法（BEL; Bayesian empirical likelihood）の漸近的な性質について考察した。主要な結果は2つである。第一に、BELの事後分布の極限はモーメント制約モデルのleast favorable submodelの尤度を用いたパラメトリックベイズ法の事後分布の極限と同等であることを示した。第二に、BELの事後分布の極限は、ある種のセミパラメトリックベイズ法から得られる事後分布の極限とも等しいことを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

経験尤度はパラメトリック尤度と様々な共通点を持つため、経験尤度を尤度の代わりとして用いるBELは自然なベイズ推定の方法であると考えられる。しかしながら、経験尤度はあくまでも疑似的な尤度であるため、BELの事後分布が通常のベイズ法によって得られる事後分布と同様に解釈可能であるかどうかは必ずしも明らかではない。本研究で得られた成果は、BELに対して一定の理論的な正当性を付与するものであり、実証研究の新しいツールとしてBELの使用を促す結果となることが期待される。

研究成果の概要（英文）：This study investigated the asymptotic properties of the Bayesian empirical likelihood (BEL), which uses the empirical likelihood as an alternative to a parametric likelihood for Bayesian inference. There are two main findings. First, the limiting posterior distribution of the BEL is the same as that of a parametric Bayesian method that uses the likelihood of a least favorable model of the moment restriction model. Second, the limiting posterior distribution is also the same as that of a semiparametric Bayesian method.

研究分野：計量経済学

キーワード：経験尤度 BEL セミパラメトリックベイズ 局所漸近正規性 Bernstein-von Mises定理

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

計量経済学では、モデルの定式化の誤りを回避するための方法として、分布の関数形を完全に特定せずに、モーメント制約によってモデルの定式化を行うことが多い。そのようなモデル(モーメント制約モデル)の有限次元パラメータは、典型的には GMM 推定量や経験尤度推定量などの極値推定量を用いて推定され、それらの推定量は優れた漸近的な性質を持つことが示されている。しかしながら、極値推定量の目的関数が多くの極大値や極小値を持つ場合には、数値計算によって最大値や最小値を求めることは容易ではない。そのような場合、ベイズ法が代替的な手段として考えられることがある。最大値や最小値を求めることと比べると、関数の積分を求めることの方が、数値計算上は容易である場合が多いためである。

モーメント制約モデルのベイズ推定において問題となるのは、モーメント制約モデルは観測値の分布について関数形の仮定を置かないセミパラメトリックモデルであるため、パラメトリックな尤度が得られないということである。そのため、古典的なパラメトリックベイズによる推定を行うことができない。この問題に対して、先行研究では大別して二つのアプローチが考察されてきた。一つは、モーメント制約から示唆される疑似的な尤度をパラメトリック尤度の代わりに用いて、パラメトリックベイズ推定を行うものである。Lazar (2003) によって提案された経験尤度を疑似尤度として用いる方法や、Schennach (2005) や Chib et al. (2018) によって提案された指数傾斜(exponentially tilted) 経験尤度を用いる方法が代表例である。もう一つのアプローチは、有限次元の興味のあるパラメータと無限次元の局外パラメータの両方に事前分布を設定し、無限次元パラメータについて積分を求めることで、有限次元パラメータの事後分布を求めるものである。このアプローチを採る研究としては、Kitamura and Otsu (2011)、Bornn et al. (2019)、Florens and Simoni (2019) などが挙げられる。後者のアプローチをセミパラメトリックベイズと呼ぶ。

二つのアプローチはそれぞれに課題を抱えている。パラメトリックベイズにおいては、疑似的な尤度を用いて事後分布を求めるため、得られた事後分布の解釈に問題がある可能性がある。形式的には事後分布が得られても、それが正しく定式化された尤度を用いて得られた事後分布と同様に解釈できるかどうかは自明なことではない。一方、セミパラメトリックベイズについては、そのような解釈の問題はないものの、計算負荷が高いうえに実装が困難であるために、実証研究者が用いるのは困難であるという課題を抱えている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、理論的な妥当性を有しつつ、計算上の負荷の低いベイズ推定の方法を提案することである。そのために、経験尤度を用いたベイズ法である Bayesian empirical likelihood (BEL) に対して、理論的な根拠を与える。経験尤度はパラメトリックモデルの尤度と多くの共通点を持つことが知られており、その類似性について頻度論の観点からはこれまで多くの研究がなされてきた。そのため、これを疑似的な尤度として用いることは自然であると考えられる。しかしながら、先行研究では Lazar (2003) がシミュレーションによって BEL の妥当性を検証しているものの、理論的な検証は行われていない。本研究では、BEL の事後分布の漸近的な性質を調べることで、BEL の正当化を行う。正当化の方法としては、BEL によって得られる事後分布が理論的に妥当なベイズ法で得られた事後分布と漸近的に同等になることを明らかにする。また、点推定量である経験尤度推定量と、BEL の事後平均(もしくは一般に事後分布の中心の尺度)の関係についても明らかにする。

3. 研究の方法

本研究では、推定手法としてはベイズ法を採用するが、その理論的正当化のためには頻度論の枠組みを用いる。すなわち、真のデータ生成過程が存在するという想定の下で、サンプルサイズが大きくなる時の事後分布の振る舞いを分析する。

BEL の正当化の方法として、Owen (2001) では、経験尤度とセミパラメトリックモデルの least favorable submodel の尤度との類似性に注目している。least favorable submodel は列記としたパラメトリックモデルであるため、その尤度を用いて得られた事後分布については解釈の問題は生じない。そのため、least favorable submodel の尤度と類似する経験尤度を用いる BEL も妥当な推定方法であると考えられるというのが、Owen (2001) のアイデアである。本研究では、この議論をより厳密なものにするために、経験尤度と least favorable submodel の尤度のそれぞれを用いた場合で事後分布を求め、それらが漸近的には同等であることを示す。

もうひとつの正当化の方法として、セミパラメトリックベイズ法から得られる事後分布との比較を行う。セミパラメトリックベイズ法も解釈の問題は生じないため、BEL とセミパラメトリックベイズ法の事後分布が漸近的に同等であることが示されれば、BEL の理論的妥当性のひとつの根拠であると考えられることができる。

4. 研究成果

主要な研究成果は以下の(1)~(4)である。

(1) モーメント制約モデルの新しい定式化の提案

はじめに、モーメント制約モデルの新しい定式化の方法を導入した。セミパラメトリックベイズ法は、有限次元パラメータと無限次元パラメータの双方に対して事前分布を導入して、有限次元パラメータの事後分布を求める方法である。そこで、元々分布の集合の形によって定式化されていないモーメント制約モデルを、有限次元の興味があるパラメータと無限次元の局外パラメータによってインデックスされた分布の集合の形で定式化をし直した。その際ポイントとなるのが、有限次元パラメータに関するスコア関数と無限次元パラメータに関するスコア関数が直交するように定式化することである。これにより、無限次元局外パラメータを推定することが有限次元のパラメータの推定に対し与える影響を、漸近的には無視することができるという利点がある。また、この定式化の下では、セミパラメトリックベイズと BEL との関係が明瞭になるという利点も持っている。

(2) 局所漸近正規性と畳み込み定理の証明

本研究では、Bernstein-von Mises (BvM) 定理と呼ばれる定理を用いて、BEL とセミパラメトリックベイズ法の事後分布の漸近的な挙動を調べる。BvM 定理の証明において鍵となるのが、モデルの局所漸近正規性 (LAN; local asymptotic normality) と呼ばれる性質である。LAN 性とは、真の分布 (帰無仮説) とそこから少し乖離した分布 (局所対立仮説) の対数尤度比の分布が、ある種の正規分布によって近似できるという性質である。(1) で提案した定式化を利用して、モーメント制約モデルの LAN 性を示した。

また、LAN 性の証明からの派生的な結果として、モーメント制約モデルの畳み込み定理を示した。畳み込み定理とは頻度論的な推定量に関する結果であり、モデルの有限次元パラメータを推定する際、いかなる正則な推定量を用いても下回ることができない漸近分散の下限を与える定理である。漸近分散の下限が明らかになれば、下限に到達する推定量は最良の推定量であることが示される。同様の結果は既に、Chamberlain (1987) や Dovonon and Atchade (2020) などでも得られてるが、本研究で示した漸近分散の下限の導出方法はより直感的に理解がしやすい方法になっているとともに、他のモデルへと拡張する際にも便利な方法になっている。また、本研究の方法を用いれば、経験尤度推定量などの既存の推定量が正則な推定量のなかで最良の推定量になっていることも容易に示すことができる。

(3) BEL の極限事後分布の導出

BvM 定理により、BEL の事後分布の漸近的な性質を考察した。これにより、BEL の事後分布は、モーメント制約モデルの least favorable model の尤度を用いたパラメトリックベイズの事後分布と漸近的に同等となることが明らかになった。さらに、BEL の事後平均は、経験尤度推定量と漸近的に同等であることも示された。(2) の結果から、経験尤度推定量は漸近的に有効な推定量であることが示されるので、これは BEL 推定量の漸近有効性を示す結果になっている。

(4) セミパラメトリックベイズの極限事後分布の導出

(1) で得られた新しいモーメント制約モデルの定式化を利用して、新たなセミパラメトリックベイズ法を提案した。セミパラメトリックベイズ法については、Bickel and Kleijn (2012) によって一般的なセミパラメトリックモデルに関する BvM 定理が示されており、この結果を利用できるようにモデルの定式化を行った。結果として得られた事後分布は、BEL の事後分布と漸近的に同等であることが明らかにされた。

先行研究においては、Schennach (2005) が指数傾斜経験尤度を用いたパラメトリックベイズ法を提案するとともに、その事後分布がある特殊なノンパラメトリック事前分布を用いたセミパラメトリックベイズ法から得られる事後分布と等しくなることを示している。本研究で得られた結果は、Schennach (2005) で示された結果の漸近バージョンであると解釈することもできる。

以上の研究成果を論文としてまとめ、投稿した。研究期間内に出版までには至らなかったが、Econometric Theory 誌より改訂要求があり、現在改訂作業を進めている。

また、研究期間中には完成しなかったが、本研究で得られた結果を無条件の期待値を用いたモーメント制約モデルから、条件付き期待値を用いたモーメント制約へと拡張する方法についても既に見通しが立っており、いくつかの予備的な結果が得られている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 末石直也
2. 発表標題 Large Sample Justifications for the Bayesian Empirical Likelihood
3. 学会等名 日本経済学会春季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 末石直也
2. 発表標題 Large Sample Justifications for the Bayesian Empirical Likelihood
3. 学会等名 日本経済学会春季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 末石直也
2. 発表標題 Large Sample Justifications for the Bayesian Empirical Likelihood
3. 学会等名 関西計量経済学研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 末石直也
2. 発表標題 Semiparametric Efficiency Bound for Moment Restriction Models with Time Series Observations
3. 学会等名 Summer Workshop on Economic Theory
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 末石直也
2. 発表標題 Semiparametric Efficiency Bound for Moment Restriction Models with Time Series Observations
3. 学会等名 関西計量経済学研究会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関