

令和 4 年 6 月 16 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03048

研究課題名（和文）相関係数の異常な挙動の解明とそれに対する対処

研究課題名（英文）Aberrant Behavior of Pearson's Correlation Coefficient and its remedy

研究代表者

椎名 乾平（Shiina, Kempei）

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：60187317

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：ピアソンの相関係数  $r$  の範囲は  $[-1, 1]$  とされるが、2変数のカテゴリー数が異なる場合、絶対値が1になれないという重大なバイアスを発見した。そこで以下のことを行った。

まずバイアスの実態を徹底的に調べた。標本相関係数の期待値はロバストに過小評価され、またこのバイアスがカテゴリー数の増加と共に減少するのを明らかにした。この事実を相関係数を使用するすべての人に伝達するよう努めた。またバイアスが他の統計手法にどのように影響するのかを調べた。そして、バイアスを除去するために、EMアルゴリズムを用いるpolychoric相関係数という新計算法を提案した。

評定尺度についての歴史的研究も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

相関係数は非常に多くの学問領域で統計的手法の基本要素として使用されている。本研究で明らかにした相関係数のバイアスは統計解析を危険にさらす場合があるので、相関係数を使用するすべての科学者・実務家の共通認識とならなければならないだろう。バイアスが回帰分析、因子分析のような手法にどのような影響を与えるのかをさらに調べるのが今後の課題となる。

またバイアスを除去するための方法が必要となるが、本研究で提案したEMアルゴリズムを用いたpolychoric相関係数はこの点において貢献できるであろう。

研究成果の概要（英文）：The range of Pearson's correlation coefficient  $r$  is said to be  $[-1, 1]$ , but we found a serious bias that the absolute value cannot attain 1 when the number of categories of the two variables are different. So we did the following:

We first thoroughly investigated the reality of the bias. The expected value of the sample correlation coefficient was robustly underestimated, and it was revealed that this bias decreased as the number of categories increased. We attempted to convey this fact to everyone who uses the correlation coefficient. We also investigated how the bias affects other statistical methods. Finally, in order to remove the bias, we proposed a new calculation method: the polychoric correlation coefficient using the EM algorithm.

We also conducted a historical study of the rating scale.

研究分野：計量心理学

キーワード：相関係数 バイアス polychoric相関係数 評定尺度

## 1. 研究開始当初の背景

ピアソンの相関係数  $r$  は2つの変数  $X, Y$  間の相関関係を表現するための基本ツールであり、高校数学にも現れ、その範囲は $[-1, 1]$ とされる。ところが椎ら(2011)は2変数のカテゴリー数(それぞれ  $m$  と  $n$  とする)が異なる場合(すなわち  $m \neq n$  の場合) 相関係数が1あるいは-1に成りえないことを発見し、この効果を Unequal Category Effect (UCE) と命名した。さらにUCEに付随して相関係数の絶対値がかなり減少する現象も発見した。例えば「テストXは2点満点で0から2までが範囲( $m=3$ )、テストBは3点満点で0から3までが範囲( $n=4$ )」という状況で、すべての得点が一回は現れるならば相関係数は1や-1になりえず矮小化する(例えば母相関係数  $\rho = .90$  の場合、標本相関係数の期待値は.69まで低下する。図1の●参照。●はバイアスがないのなら本来●の位置になければならない)。相関係数は単体で、あるいは数多くの統計手法の中で重要要素として使用されるため、極めて危険な状況と言わざるを得ない。そこで本研究はこの異常行動の大きさと、出現範囲を確定させ、その上で可能な対処法の提案を行うのを目的とした。その結果 Likert タイプの評定データのより良い解析法に指針を与えることになるうと考えた。尚、 $r$  の発明者である Karl Pearson は、カテゴリーが“広い”ときに、 $r$  の絶対値に減少バイアスがかかるのに気づいており(CCE, Coarse Category Effect, Pearson, 1913)、この問題は社会学や心理学で研究されてきた。本研究で扱うUCEはCCEに関連はしているが、別の問題と考えられる。なぜならカテゴリーの広さにかかわらず、 $m=n$  ならば  $r$  は1または-1の値を取れるからである。

## 2. 研究の目的

全研究期間を通じて4つの目的を設定した。

まず、カテゴリー数が異なる場合に相関係数がバイアスを受けるのならば(UCE)、どのような範囲でどの程度のバイアスを受けるのかを、理論的あるいは経験的に、徹底的に調べる必要がある。これが本研究の第1の目的となる(図1参照)。

その結果を、早く、広く、心理学者のみならず相関係数を使用するすべての科学者・実務家に伝達するのが第2の目的となる。その際に過去の研究事例の中でUCE、CCEの影響を受けた例を検討する必要も出て来るだろう。

周知のように相関係数は回帰分析、因子分析等の多くの統計モデルでも用いられている。そこでUCEバイアスがこれらにどのような影響を与えるのかを調べるのが第3の目的となる。ただしいきなりSEMのような複雑な分析に手をつけると收拾がつかなくなるので、まずは信頼性係数に注目することにした。

最後の第4の目的では将来の研究のための対処法・予防法の提案を行う。より良い相関係数値を求めるためにはUCE、CCEからの影響が少ない polychoric 相関係数の使用が考えられる。本研究において、polychoric 相関係数の新しい計算法が提案された。

## 3. 研究の方法

全体を通じて、文献研究・理論研究と共にシミュレーションによる計算実験が行われた。計算実験では100億個オーダーの相関係数がランダムに生成され解析に使用された。また目的4に関しては数理統計的な理論開発が行われた。

## 4. 研究成果

**第1の目的**は、カテゴリー数が異なる(即ち  $m \neq n$ ) 場合の相関係数のバイアスについて、どのような範囲でどの程度の大きさになるのかを、理論的あるいは経験的に精査することであった(図1参照)。そのために大規模な計算実験を行った結果、標本相関係数  $r$  の標本平均値は真の相関値 に対してロバストに過小評価され、またこの過小化バイアスがカテゴリー数の増加と共に減少するのが明らかになった。この結果は2019年に公刊された(文献 )。

過小化バイアスの動きは複雑なものになるが、主要な結果を図1に示した。図1から読み取れるのはUCE、CCEはロバストな現象であり、特にカテゴリー数が少ない場合でかつ  $m \neq n$  の場合顕著となり、図1の左上の部分などでは3割4割の割り負けは当たり前といった状況になっている。例えば●の位置などに注目されたい。相関係数を使用する全ての人はこの事実を知るべきだと思う。

**第2の目的**は、バイアスの存在を、心理学者のみならず相関係数を使用するすべての科学者・実務家に伝達することである。この目的のために、教育心理学の学会で発表を行った。またコンピュータ教育の学術誌に論文掲載した(文献 )。しかしこの活動は成功したとは言いがたく、今後根気よく続けていく必要があるだろう。

**第3の目的**は、バイアスが回帰分析、因子分析のような手法にどのような影響を与えるのかを調べることである。信頼性係数に対する影響を、 、 、非線形SEM係数を題材に調べた。主要な結果は2021年に公刊された(文献 )。ただし相関係数を用いる統計手法は非常にたくさんあるので、更なる研究が必要であろう。

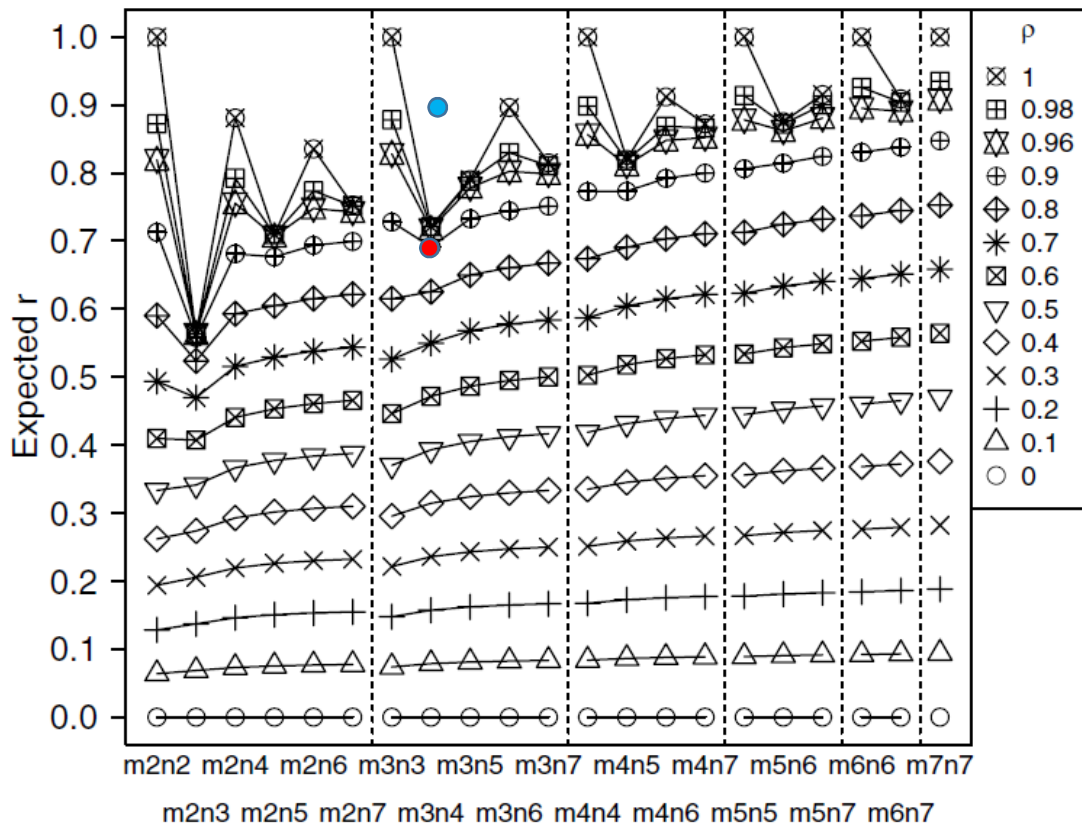


図1 相関係数に対するバイアスの大きさ (Unequal Category Effect, UCE) を示す図 (文献より)母相関係数は0.1から1までの値を取り、縦軸は標本相関係数の期待値である。横軸のm2n2、m3n5等々の記号は、例えば第一変数のカテゴリー数mが2、第二変数のカテゴリー数nが2であることを示す。●は本来●にいなければならないのだがUCEによって小さくなっている。

第4の目的はどのようにバイアスを取り除くかという問題であるが、polychoric 相関係数を用いるのが標準的である。そこで、polychoric 相関係数の新しい計算法を提案・公表した(文献)。この手法はEMアルゴリズムを用いる点に新規性がある。将来的には元データのカテゴリーに切断正規分布の理論を用いて得点を再付与していく方法を検討したい。

さらなる成果 本研究を実施するにあたり、相関係数や評定尺度の古典的研究を深耕することとなった。そのような活動の余録として評定尺度や相関係数についての歴史的論文をいくつか書くことになった(例えば文献)。忘れ去られていた、あるいは誤って理解されていたいくつかの歴史的事実を明らかにすることが出来たと思う。

以上を総括すれば、十分に初期の目標を達成できたかと思う。

<引用文献>

Onoshima, T., Shiina, K., Ueda, T., & Kubo, S. (2019). Decline of Pearson's  $r$  with categorization of variables: a large-scale simulation. *Behaviormetrika*, 46(2), 389-399.

小野島昂洋・椎名乾平 (2019). カテゴリカルな教育データと相関係数についての留意点 コンピュータ & 工教育, 47, 25-30.

小野島昂洋・椎名乾平 (2021). 順序カテゴリデータへの確認的因子分析に基づく信頼性係数の評価 -モデルが正しく特定された場合と誤特定された場合の比較- 教育心理学研究, 69, 281-296.

Shiina Kenpei, Ueda Takashi, Kubo Saori. (2018). Polychoric Correlations for Ordered Categories Using the EM Algorithm. In *Quantitative Psychology - The 82nd Annual Meeting of the Psychometric Society*, Zurich, Switzerland, 2018 247-259

Shiina, K. (2021). Commentary: The Historical Roots of Visual Analog Scale in Psychology as Revealed by Reference Publication Year Spectroscopy. *Frontiers in Human Neuroscience*, 15.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 7件）

1. 著者名 Shiina Kenpei	4. 巻 15
2. 論文標題 Commentary: The Historical Roots of Visual Analog Scale in Psychology as Revealed by Reference Publication Year Spectroscopy	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Frontiers in Human Neuroscience	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3389/fnhum.2021.711691	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 椎名乾平	4. 巻 69
2. 論文標題 A Small Catalogue of Classical Rating Scales	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 学術研究（人文科学・社会科学編）（早稲田大学 教育・総合科学学術院）	6. 最初と最後の頁 93-118
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 小野島昂洋・椎名乾平	4. 巻 69
2. 論文標題 順序カテゴリデータへの確認的因子分析に基づく信頼性係数の評価 -モデルが正しく特定された場合と誤特定された場合の比較-	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 教育心理学研究	6. 最初と最後の頁 281-296
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Takahiro Onoshima Kenpei Shiina Takashi Ueda Saori Kubo	4. 巻 46
2. 論文標題 Decline of Pearson's $r$ with categorization of variables: a large scale simulation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Behaviormetrika	6. 最初と最後の頁 389-399
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s41237-019-00089-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 小野島昂洋・椎名乾平	4. 巻 47
2. 論文標題 カテゴリカルな教育データと相関係数についての留意点	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 コンピュータ & エデュケーション	6. 最初と最後の頁 25-30
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 椎名乾平	4. 巻 68
2. 論文標題 20世紀初頭における我が国での相関係数の普及について	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 学術研究 (人文科学・社会科学編) (早稲田大学 教育・総合科学学術院)	6. 最初と最後の頁 75-85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shiina Kenpei, Ueda Takashi, Kubo Saori	4. 巻 0
2. 論文標題 Polychoric Correlations for Ordered Categories Using the EM Algorithm	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 In Quantitative Psychology - The 82nd Annual Meeting of the Psychometric Society, Zurich, Switzerland,	6. 最初と最後の頁 247 ~ 259
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-77249-3_21	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 椎名乾平・上田卓司・久保沙織	4. 巻 11
2. 論文標題 相関係数を通じて心理学を知ってほしい	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 統計数理研究所共同研究リポート412 統計教育実践研究 第11巻	6. 最初と最後の頁 41 ~ 44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 小野島昂洋・椎名乾平
2. 発表標題 順序カテゴリデータへの確認的因子分析に基づく 信頼性係数の評価
3. 学会等名 日本教育心理学会63回総会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 椎名乾平
2. 発表標題 昔の評定尺度 - 19世紀初めか20世紀初めまで
3. 学会等名 日本教育心理学会62回総会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小野島昂洋・椎名乾平
2. 発表標題 変数のカテゴリ化によって生じる相関係数のバイアスがクロンバックの $\alpha$ へと及ぼす影響
3. 学会等名 日本教育心理学会62回総会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 椎名乾平
2. 発表標題 Likert 評定時のカーソル軌跡のクラスター分析
3. 学会等名 日本行動計量学会第48回大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 椎名乾平
2. 発表標題 20世紀初頭におけるわが国への相関係数の導入について
3. 学会等名 日本心理学会第83回大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 椎名乾平
2. 発表標題 評定尺度はリカートが発明したわけではない リカート(1932)より前の世界
3. 学会等名 日本教育心理学会61回総会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小野島昂洋・椎名乾平・上田卓司・久保沙織
2. 発表標題 連続変数の離散化に伴う相関係数の低下：離散化の際の閾値を考慮した大規模シミュレーション.
3. 学会等名 日本心理学会第83回大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 椎名乾平, 久保沙織
2. 発表標題 高校教育での相関係数と心理学 -データサイエンスとしての心理学をアピールするチャンスか？
3. 学会等名 日本教育心理学会60回総会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	久保 沙織  (Kubo Saori)  (70631943)	東北大学・高度教養教育・学生支援機構・准教授    (11301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------