様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　 ５ 月 １１ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2020
課題番号：１８Ｋ０３１９８

研究課題名（和文）頂点代数上の加群の拡張

研究課題名（英文）a generalization of the notion of a module for a vertex algebra

研究代表者
田邊　顕一朗（tanabe, kenichiro）

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：１０３３４０３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：非退化偶格子に付随する頂点代数，およびその不変部分代数は，よい性質を持つ頂点代数の構成に重要な役割を果たしている．格子が正定値の場合は通常の加群を調べればよいが，そうでない場合は，弱加群という，より広いクラスの表現を扱う必要がある．筆者は，非退化偶格子に付随する頂点代数の位数が2の自己同型に関する不変部分代数について，既約弱加群を分類するとともに弱加群の完全可約性を示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
頂点代数上の弱加群は，格子に付随する頂点代数の表現に現れる自然な対象である．ムーンシャイン頂点作用素代数の性質の解明に重要な役割を果たすと考えているが，通常の加群における手法が全く使えなくなるため，弱加群を研究することはこれまで極めて困難であった．筆者は頂点代数の特性を活かした，表現を調べる新しい手法を導入し，不変部分代数の表現論を進展させた．

研究成果の概要（英文）：The vertex algebra associated to a non-degenerate even lattice, and its invariant subalgebra, plays an important role in constructing vertex algebras with good properties. If the lattice is positive definite, the modules for a vertex algebra are well studied, but if not, we need to deal with a broader class of representations called weak modules. The author classified the irreducible weak modules for an invariant subalgebra of the vertex algebra associated to a non-degenerate even lattice. The author also showed that every weak module for the same vertex algera is completely reducible.

研究分野：代数学

キーワード：頂点代数

１．研究開始当初の背景

頂点代数は，ムーンシャイン予想の解決や 2 次元共形場理論の数学的定式化等を目的として 1986 年にボーチャーズによって導入された新しい代数系である．特にその代表的な具体例であるムーンシャイン頂点代数を通して，共形場理論，有限群論，モジュラー形式，リー環の表現論が結びつけられ，ボーチャーズ自身によってムーンシャイン予想が解決されたことは，これらの分野に大きな研究の展開を生み出した．その後も他の分野との関連が次々に見つかっている一方で，頂点代数上の加群の一般論については，例えば加群のテンソル積が一般には構成されていないことや，自由加群にあたるものが存在しないことにみられるように，基本的なことが分かっておらず，また拡張が不十分なままである．筆者は頂点代数 V 上の加群論，特に G を V の位数有限の自己同型群としたとき，G によって固定される元全体からなる不変部分代数 V^G 上の加群論を主に研究している．V^G 加群は，表現論において自然にあらわれる対象であるとともに，よい性質をもつ頂点代数，例えば上記のムーンシャイン頂点代数等，の構成に応用があるため，この分野の重要な研究対象となっている．V^G 加群において，最初に問題になるのは V 加群との関係である．V 加群は自然に V^G 加群となる．さらに，物理学者達によって，V^G 加群は V 加群を拡張したツイステッド加群を用いて全て構成されると予想されている．この予想は，筆者を含む多くの研究者によっていくつかの例で検証されてきた．しかしながら，上に述べたように，テンソル積等の表現の基本的な部分が未完成であるため，これ以上の進展は難しいと考え，筆者は加群を拡張する研究を開始した．加群がテンソル積を取る操作で閉じていることは一般には期待出来ないため，加群を大きく拡張する必要があるからである．まず加群の直接の拡張である弱加群の研究や，それを基にさらにより広いクラスの加群を定める研究を行っている．弱加群は，1996 年にリィによって，頂点代数の局所系の理論に付随して導入された概念である．頂点作用素代数，およびその加群に課されている次数付きという条件は強いものであるため，そこでは，次数付きの条件を外した頂点代数や弱加群を，局所系を用いてまず構成している．その時点では，弱加群は通常の加群を得るまでの補助的な概念だと考えられていたと思われる．その後，表現の研究が整備されていくにしたがって，次数付きを課した加群は条件が強すぎるものであり，弱加群，もしくはそれにいくつかの別の条件を課したものが自然な概念であると認識されてきた．現在盛んに研究されている C2 余有限を満たす頂点作用素代数に対しては，真の弱加群は現れないため，加群と弱加群の違いを気にする必要はない．しかし，ハイゼンベルグ頂点代数やワイル頂点代数などのように，C2 余有限でない重要な頂点代数が存在し，弱加群を考察する場合が出てくる．また，正定値でない格子に付随する頂点代数は，自分自身が真の弱加群になっている重要な例である．ムーンシャイン頂点代数は，ニーマイヤー格子の一つであるリーチ格子の不変部分代数を用いて構成されている．24 個のニーマイヤー格子の多くの性質は，符号が(25,1)のローレンツ格子を通して理解できるため，格子頂点代数の場合でも，正定値以外の格子の場合を調べることは自然である．弱加群は加群と比べて扱いが極めて難しいため，これまでその研究については全く進展がなかった．

２．研究の目的

(1) 大きな目的は，頂点代数上の加群の定義を拡張し，自由加群の構成，および加群同士のテンソル積の構成を行うことにより，頂点代数上の加群論を自由に展開するための基礎を確立すること，である．
(2) 加群の拡張を調べるために，まずその直接の拡張である弱加群の性質を調べる．特に格子頂点代数の部分代数の弱加群を調べる．

３．研究の方法

(1) 頂点(作用素)代数の加群を扱うには，1996 年にヅーによって導入されたヅー代数と呼ばれる結合的代数が有用な道具である．頂点作用素代数上の既約加群（正確にはＮ次数付き弱加群）とヅー代数上の既約加群とが一対一に対応することが，ヅーによって示されているからである．結合的代数上の加群という，なじみのある対象が扱えるため，頂点作用素代数上の加群に関する研究は，ほとんどの場合，このヅー代数を詳細に調べることによってなされている．ところが，弱加群は次数に関する条件は課していないので，当然ながらヅー代数を用いることは出来ない．弱加群の研究は，初めは全くの手探りでやっていくしかなかった．手掛かりとなったのは，リー環の表現に現れるホイッタカー加群（ホイッタカーベクトル）であった．これはリー環に対して，次数付きでない既約加群の例を与える．もともとは $\mathfrak{sl}(2)$ の表現に対して Arnal—Pinczonn によって 1974 年に導入されたものであり，その後，1978 年にコスタントによって一般の有限次元単純リー環に対して研究されたものである．三角分解を持つリー環に対してはいつでも定義できるため，特にハイゼンベルグ頂点代数がホイッ

タカー加群を持つこと，さらにそれが次数付きでない既約弱加群であることはすぐに分かる．このようにハイゼンベルグ頂点代数に対しては何も問題がないのだが，その不変部分代数に対してはホイッタカー加群とは何か？　が問題になってくる．ハイゼンベルグ頂点代数は実質的にリー環と見なせるのであるが，その不変部分代数はリー環にならないため，同じ議論が使えないからである．筆者のアイディアは，頂点作用素代数は共形元，つまりヴィラソロ代数を含んでいるため，ヴィラソロ代数としてのホイッタカーベクトルを持つ弱加群を，ホイッタカー加群の類似物としてみる，ということであった．この場合にも，不変部分代数上の，ホイッタカーベクトルを持つ弱加群は，通常の加群と同様にツイステッド加群から全て構成されることを示すことが出来た．より重要なことは，次数付きでない場合に，頂点代数内の関係式が，弱加群に対してどのように制約を与えるかの情報を得たことであった．また，計算機を用いてハイゼンベルグ頂点代数内の関係式を得るプログラムを作成した．頂点代数の元の積を具体的に計算することは，非常に面倒かつ時間のかかる作業である．頂点代数内の関係式を得るためには非常にたくさんの元の積を計算する必要があるため，手計算はほとんど不可能となる．そのため，元の積，および関係式を，計算機を用いて自動的に得るプログラムを作成する必要があった．これには，以前の共同研究で，計算機代数の専門家である立教大の横山氏から，そのような場合のプログラムの知識を習得できたことが大きな利点であった．ここで習得した知識を用いて格子頂点代数の複雑な積を計算するプログラムを作成することが出来た．頂点代数上の積をマスマティカ上で計算するソフトはあるが，ここではより詳細な情報を取り出す計算をする必要があったため，自力でプログラムを作成する必要があった．これを基に格子頂点代数内の関係式を得るプログラムを作成したことが次の格子頂点代数の不変部分代数の表現の研究につながった．

(2) 格子頂点代数の不変部分代数 V_L^+には，ハイゼンベルグ頂点代数の不変部分代数 M(1)^+が部分代数として入っている．筆者はまず，V_L^+の弱加群 W には M(1)^+加群が含まれていることを示した．これを示すために，M(1)^+および V_L^+内の関係式を，上記のプログラムを用いて大量に求めた．次に弱加群上の頂点代数の特定の作用に対して，それらの関係式がどのような形になるのかを，別のプログラムを作成することにより求めた．これによって弱加群上の関係式を十分にたくさん求めることが出来た．このことにより，M(1)^+のヅー代数上の加群を弱加群 W 上に構成することが出来る．一般論より，M(1)^+上の加群が弱加群 W 上に構成できる．この M(1)^+上の加群を用いて，M(1)^+上の既約加群を W 上に構成する必要があるのだが，それには M(1)^+上の加群の拡大が分裂するかどうか，つまり Ext 群を調べる必要が出てくる．M(1)^+のランクが 1 の場合には，2005 年の安部氏の先行研究がある．これを一般のランクの M(1)^+に拡張するためには，安部氏による方法の拡張および，関係式を計算する計算機上のプラグラムを新たに作成する必要があった．M(1)^+上の既約加群を W 上に構成した後は，フュージョン・ルールを用いて，その既約加群から V_L^+の既約弱加群を弱加群 W 上に構成していく．実はこれまでのフュージョン・ルールは，行き先が通常の加群に対してしか計算できないものであったため，それを行き先が弱加群に拡張する必要があった．これが計算で一番大変な部分である．格子の元のノルムに関して 4 通りの場合分けを行い．それぞれに計算機のプログラムを作成する必要があった．使用する関係式も非常に膨大になった．V_L^+の生成元，およびそれらの交換関係を求めておく必要があったが，それも計算機上のプラグラムを作成して求めた．

４．研究成果

(1)ランクが 1 のハイゼンベルグ頂点作用素代数の不変部分代数 M(1)^+に対して，ホイッタカーベクトルをもつ既約弱加群の分類を行った．条件付きではあるが，真の弱加群が出てくる場合で，格子頂点代数以外で既約弱加群が分類出来た初めての例を与えている．また，リー環に付随する頂点代数以外で，ホイッタカー加群が考察された初めての例でもある．一般のランクに対しては，ホイッタカーベクトルだけではおそらく既約加群は決定できないと思われる．この場合，ホイッタカー加群をどう定義すべきはさらなる考察が必要である．

(2)同様にシングレット頂点代数に対して，Whittaker ベクトルをもつ既約弱加群の分類を行った．

(3) 非退化偶格子の付随する頂点代数の，位数が 2 の自己同型に関する不変部分代数 V_L^+に対して，既約弱加群の分類を行った．これは格子が正定値の場合は，1999 年のドン−永友(格子のランクが 1 の場合)，2004 年の安部−ドン(一般の場合)によって得られた結果の拡張になっている．また，この場合は筆者の証明は彼らの結果の別の方法を用いた証明を与えている．筆者の結果から，不変部分代数上の既約弱加群は，もとの格子頂点代数上のツイステッド弱加群を用いて全て構成できることが確認できる．

(4) さらに V_L^+上の弱加群は完全可約であること，つまり既約加群の直和に分解できることを示した．これは 2004 年の安部(格子のランクが 1 の場合)，2012 年のドン−ジャン−リンの結果の

拡張になっている．格子が正定値の場合は，筆者の証明は彼らの結果の別の方法を用いた証明を与えている．これらの結果は，格子頂点代数の場合を除いて，真の弱加群が出てくる場合に，頂点代数上の弱加群の性質が完全に理解できた初めての例を与えている．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Tanabe Kenichiro	４．巻 23
２．論文標題 Simple Weak Modules for Some Subalgebras of the Heisenberg Vertex Algebra and Whittaker Vectors	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Algebras and Representation Theory	６．最初と最後の頁 53--66
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10468-018-9837-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　1件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 Kenichiro Tanabe
２．発表標題 非退化偶格子に付随する頂点代数の不変部分代数の既約弱加群
３．学会等名 第36 回代数的組合せ論シンポジウム
４．発表年 2019年

１．発表者名 Kenichiro Tanabe
２．発表標題 The irreducible weak modules for the fixed point subalgebra of the vertex algebra associated to a non-degenerate even lattice by an automorphism of order 2
３．学会等名 Vertex Operator Algebras and Related Topics
４．発表年 2020年

１．発表者名 Kenichiro Tanabe
２．発表標題 非退化偶格子に付随する頂点代数の不変部分代数の表現
３．学会等名 日本数学会 2020年度年会(covid-19によって年会は中止)（招待講演）
４．発表年 2020年

1．発表者名 田邊顕一朗
2．発表標題 格子に付随する頂点代数の不変部分代数の表現について
3．学会等名 第57回愛媛大学代数セミナー
4．発表年 2018年

1．発表者名 田邊顕一朗
2．発表標題 非退化偶格子に付随する頂点代数の不変部分代数の弱加群
3．学会等名 日本数学会 2021年度年会
4．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関