

令和 4 年 6 月 1 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03212

研究課題名(和文) リー理論に現れる有限次元代数と組合せ論的对象の研究

研究課題名(英文) Research on finite dimensional algebras and combinatorial objects that appear in Lie theory

研究代表者

有木 進 (ARIKI, SUSUMU)

大阪大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：40212641

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：2015年度～2017年度の研究課題において古典型ヘッケ代数の有限表現型ブロック代数の森田同値類を、基礎体である代数閉体の標数が2と異なるという仮定のもとで決定したが、その証明において重要な役割を果たしたのは有限表現型対称セルラー代数の分類定理であった。順表現型の場合も自然な問いとして順表現型対称セルラー代数の分類問題が考えられるが、多項式増大順表現型の場合に森田同値類を決定できた。またその後は傾変異を用いる研究を行い、基礎体である代数閉体の標数が2と異なるという仮定のもとで古典型ヘッケ代数の順表現型ブロック代数の森田同値類の決定に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

現代代数学において種々の体上の簡約群の表現論は保形形式その他の広い分野に関係する中心的な研究課題のひとつである。簡約群の表現論をより簡単な代数の表現論に帰着して研究する試みは昔から行われてきたが、ヘッケ代数はその文脈でよく使われる基本的な代数である。近年は簡約代数群に対しても正標数の体上の表現論が研究され始めており、ヘッケ代数のモジュラー表現論を先行して開発しておくことは学術上極めて有意義であると思われる。

研究成果の概要(英文)：In the previous research project 2015-2017, I determined Morita classes of blocks of Hecke algebras of classical type which are representation-finite. In the proof, classification of symmetric cellular algebras of finite representation type played an important role. Thus, it is natural to consider classification of symmetric cellular algebras of tame representation type. We have succeeded in classifying those which are tame of polynomial growth. After that, I have utilized tilting mutation to obtain the classification of Morita classes of tame blocks of Hecke algebras of classical type under the assumption that the characteristic of the base algebraically closed field is not equal to two.

研究分野：表現論

キーワード：ヘッケ代数 順表現型 多項式増大順表現型

1. 研究開始当初の背景

ヘッケ代数はリー理論において重要な位置を占める有限次元代数である。リー理論では、種々の体上定義された古典型代数群の既約加群の分類・構成や、カズダン・ルスティク予想の記述などにヘッケ代数が使われるが、これらの利用において従来はヘッケ代数が半単純の場合の研究が中心であった。しかし、研究代表者は1990年代からヘッケ代数を円分ヘッケ代数に一般化した上で円分ヘッケ代数のモジュラー表現論を発展させてきた。研究を推進する基本的道具は研究代表者による円分ヘッケ代数の加群圏を用いた圏化理論である。この圏化理論ではアフィンA型リー代数の可積分加群の圏化が得られる。すなわち、円分ヘッケ代数の有限次元加群のなす加群圏のグロタンディエク群の直和が可積分加群を実現し、可積分加群のフォック空間への埋め込みを通じて分解係数を得ることができる。ここで分解係数とはスペイト加群と呼ばれる理解しやすい加群に対し各既約加群が組成因子として現れる重複度のことである。2000年代に入り、ホバノフ・ラウダが籐ヘッケ代数および円分籐ヘッケ代数を導入し、またカン・カシワハラは円分ヘッケ代数の圏化理論を他のリー型に一般化した。さらに、ブランダン・クレシュチェフは円分ヘッケ代数、とくにA型・B型ヘッケ代数が次数付代数であることを明らかにするとともに研究代表者の分解係数に関する結果を次数付分解係数に関する結果に強めた。この定理は現在アリキ・ブランダン・クレシュチェフ圏化定理と呼ばれている。研究代表者は、上記発展の次の段階として、有限次元代数の傾変異の理論を利用して古典型ヘッケ代数の有限表現型ブロック代数の森田同値類を決定することを目指し、「リー理論と代数の表現の研究(平成27年度~29年度)」において、基礎体である代数閉体の標数が2と異なるという仮定のもとで古典型ヘッケ代数の有限表現型ブロック代数の森田同値類は例外頂点をもたない直線をブラウアー木にもつブラウアー木代数に限ることを示した。今回の研究計画はこの成果をさらに発展させることを目的としている。

2. 研究の目的

よく知られているように、有限次元代数は有限表現型、順表現型、暴表現型に分類される。上記で述べたように、これまでの研究で有限表現型ブロック代数の森田同値類を決定できたので、本研究課題では古典型ヘッケ代数の順表現型ブロック代数の森田同値類を決定することを目的とした。また、アダチ・イヤマ・ライテンにより2014年に出版されたタウ傾理論の急速な発展に鑑み、タウ傾理論をヘッケ代数に適用し、具体的なタウ傾加群の分類等を目指すとした。タウ傾理論では特別な性質をもつ部分加法圏の分類など多くの表現論的な分類問題がタウ傾加群に係る。タウ傾加群に関して最初の基本的な問いはタウ傾加群の同型類の個数が有限かどうか、有限ならばその個数を具体的に与えることができるかであり、本研究ではタウ傾加群の同型類の個数の有限性の判定条件を考察することとした。

3. 研究の方法

種々の研究集会に参画して新しい研究動向を調査し、また種々の文献を通じて利用可能な証明手法を習得する。また、表現論研究者との対面での研究討論を通じ有効なアイデアを得る。このような純粋数学研究では標準的な方法で行った。しかしながら、2020年当初から現在にいたるまでCovid-19が猛威を振るい、計画していた2件の国際研究集会の開催や国内外出張の多くを中止することを余儀なくされた。

4. 研究成果

上記の有限表現型ブロック代数の森田同値類の決定において最後の段階で重要な役割を果たしたのはオーマツの定理である。オーマツの定理とは有限表現型対称セルラー代数の分類定理であり、順表現型を研究するためにまず順表現型セルラー代数にどのようなものがあり得るかが自然な問いとして現れる。一般の順表現型の場合には研究の手がかりも得られない難しい問いであったが、多項式増大順表現型セルラー代数に限れば、スコウロンスキーによる種々の分類を活用することにより森田同値類の分類を得ることができた。本研究は、岡山理科大学の加瀬遼一氏、茨城大学の宮本賢伍氏(当時弓削商船高専)、信州大学の和田堅太郎氏との共同研究である。既約加群の同型類の個数が4以下の分類結果を例外的な代数が現れたと考えれば、つまり既約加群の同型類の個数が5以上に限れば、多項式増大順表現型セルラー代数の森田同値類はブラウアーグラフが重複度2の例外頂点がちょうど2個の直線であるブラウアーグラフ代数に限ることがわかった。この成果は2020年にAlgebra and Representation Theoryに出版済である。その後は古典型ヘッケ代数の順表現型ブロック代数の森田同値類を決定することを目標として研究を行った。ルキエがアフィンA型リー代数の可積分加群のワイル群作用、今の場合アフィン対称群作用、をリッカルト複体を用いて圏化したことを用いると、A型およびB型ヘッケ代数に対し導来圏同値な順表現型ブロック代数の代表元を得ることができる。そこでさらに傾変異を具体的に計算することにより、最終的に基礎体である代数閉体の標数が2と異なるという仮定のもとで古典型ヘッケ代数の順表現型ブロック代数の森田同値類の分類結果を得た。この成果

は 2021 年に Journal of Australian Mathematical Society に出版済である。
タウ傾理論のヘッケ代数への応用については、最初の問いとしてブロック代数がタウ傾無限かどうかを考察する方針で進んだ。研究当初は、ヘッケ代数が次数付代数でありホバノフ・ラウダ生成元に現れる冪等元を活用することで、ヘッケ代数の適切な部分代数の商代数がタウ傾無限であることを示す方針で進んだが、この方針は成功しなかった。ただその研究の中でタウ傾有限性が導来圏同値で保たれない例を発見し、博士課程指導学生の論文に私からの指摘としてこの例を記載してもらった。その後本研究課題を 1 年延長した 2021 年度の研究期間において次数付分解係数を利用する方針に気づき、当初方針を変更した結果、A 型ヘッケ代数のブロック代数についての中間的な研究成果が得られたが、研究課題「暴表現型円分ヘッケ代数と対称群の表現論」(令和 3 年度~7 年度)で研究を続行する予定である。具体的には、複素数体上の変形シューア代数の次数付分解係数に関するシャンの定理をもとに、任意の標数の代数閉体上定義された対称群のヘッケ代数のブロック代数に対し、ある条件をみだす次数付分解係数からタウ傾無限性を示す手法を開発したので、この手法を用いて多くのブロック代数に対しタウ傾無限性を判定することを考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 S. Ariki, R. Kase, K. Miyamoto, K. Wada	4. 巻 23
2. 論文標題 Self-injective Cellular Algebras Whose Representation Type are Tame of Polynomial Growth	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebras and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 833, 871
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10468-019-09872-w.	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Ariki	4. 巻 -
2. 論文標題 On cyclotomic quiver Hecke algebras of affine type	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Ring Theory 2019	6. 最初と最後の頁 3, 22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/9789811230295_0001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Ariki	4. 巻 111
2. 論文標題 Tame block algebras of Hecke algebras of classical type	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Australian Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 179, 201
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S1446788719000326	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Ariki, E. Park, L. Speyer	4. 巻 55
2. 論文標題 Specht modules for quiver Hecke algebras of type C	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 565, 626
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/55-3-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 8件）

1. 発表者名 Susumu Ariki
2. 発表標題 Representation type and decomposition numbers of Hecke algebras
3. 学会等名 International Conference on Representation Theory VIII (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Susumu Ariki
2. 発表標題 On cyclotomic quiver Hecke algebras of affine type
3. 学会等名 The 8th China-Japan-Korea International Symposium on Ring Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Susumu Ariki
2. 発表標題 Tame blocks of Hecke algebras
3. 学会等名 Algebraic Representation Theory and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Susumu Ariki
2. 発表標題 Modular Representation Theory of Hecke algebras
3. 学会等名 Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Susumu Ariki
2. 発表標題 Tame block algebras of Hecke algebras of classical type
3. 学会等名 The international meeting of the C.M.S. and the A.M.S. Special session on Quantum Algebras and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Susumu Ariki
2. 発表標題 Lifting Schur positive functions to Kashiwara crystals
3. 学会等名 The first SWAN workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Susumu Ariki
2. 発表標題 The RSK correspondence and its variants in the light of crystal graph theory
3. 学会等名 MPI-INF and MPI-MiS joint workshop on Theoretical Computer Science and Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Susumu Ariki
2. 発表標題 Block algebras of Hecke algebras of classical type and the cellularity
3. 学会等名 Representation theory of reductive Lie groups and algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------