

令和 4 年 4 月 11 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03218

研究課題名(和文) 数論にあらわれる多変数複素解析関数の研究

研究課題名(英文) Research on analytic functions of several complex variables appearing in number theory

研究代表者

津村 博文 (Tsumura, Hirofumi)

東京都立大学・理学研究科・教授

研究者番号：20310419

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題においては、整数論研究で重要であるゼータ関数の性質を調べることを目的としている。とくに数理論理学者の E. Witten の研究をベースに構成された Witten ゼータ関数、また多重対数関数という重要な概念を含んだ Arakawa-Kaneko ゼータ関数というものを研究し、これまで得られていなかった重要な結果、特に新しい特殊値の明示的な表示式を導いた。これらの結果は、その後も他の研究者によって、継続的な研究が続いており、今後の一層の進展が期待できる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の成果は、これまでの研究で得られていた結果を一般的に扱っているという点で重要なものであると考えられる。これまで個別に研究されていた Euler-Zagier 型、Mordell-Tornheim 型、Apostol-Vu 型などと呼ばれる多重級数型のゼータ関数が、様々な研究者によって個別に研究されてきたが、多変数 Witten ゼータ関数という広いクラスの研究を行うことで、既知の結果の統一的な考察、さらには今後の研究すべき方向性が統一的に見通せるという意味で、非常に重要な視点を与えていると考えられる。

研究成果の概要(英文)：In this study, we aim to consider the properties of zeta functions which play important roles in the research of Number Theory. In particular, based on the study of E. Witten who is the famous researcher of Mathematical physics, we studied Witten's zeta function. Also we studied Arakawa-Kaneko zeta functions which include polylogarithms and gave new results, in particular new explicit expressions of the special values of these functions, which are important in this area. These results have been recently studied by a lot of researchers. Further development of this research can be expected in the near future.

研究分野：代数学

キーワード：整数論 ゼータ関数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

数論にあらわれる多変数複素解析関数について、研究代表者の継続的な研究として多変数 Witten ゼータ関数、多重 Arakawa-Kaneko ゼータ関数などについての数論的性質を調べることが重要な課題となっていた。とくにこれらの関数の複素解析的な性質、これらの関数の満たす関係式や、特殊値の導出、さらにはその数論的性質を調べることが重要な点と考えられていた。

2. 研究の目的

- (1) Witten ゼータ関数については、正の偶数点での値が古くから調べられてきたが、奇数点での値はほとんど知られていなかった。1変数関数の場合と異なり、多変数の場合はその解析的な性質を調べることが非常に難しく、重要な課題となっていた。とくに偶数点でのよく知られた Witten volume formula と呼ばれる公式を多変数かして、様々な自然数での値を明示的に記述すること、さらにはそれが連続的な関数関係式に拡張できるか等が重要な目的である。
- (2) 多重ゼータ値の研究で重要な役割を果たす Arakawa-Kaneko ゼータ関数の研究は活発だが、そのレベル2類似である多重 T 値の研究はこれまであまり取り組まれてこなかった。本課題において、これまで知られていなかった多重 T 値の性質を解明し、既知の多重ゼータ値の問題の類似的考察に取り組みことは重要な研究目的である。
- (3) 多変数の複素関数として、数論的関数に付随する多重 Dirichlet 級数の解析的性質を調べることは、古典的な数論的な問題への応用を考えるうえで非常に重要な手段である。本課題では、二重 Dirichlet 級数に限定して、その解析的性質を調べることが目標とする。
- (4) テータ関数の Jacobi 恒等式を利用して、Riemann ゼータ関数の特殊値の級数表示を与える。
- (5) ポリベルヌーイ多項式の値の双対公式を証明する。よく知られている B 型および C 型のポリベルヌーイ数を含む形のポリベルヌーイ多項式の和で定義される対称化ポリベルヌーイ数に関する双対公式を証明し、既知の結果を一般化する。

3. 研究の方法

- (1) これまで知られている方法とは異なり、ポアンカレ多項式を利用して、多変数 Witten ゼータ関数の特殊値、とくにこれまで知られている偶数点での値のみならず、奇数の index を含むような整数点での特殊値を、Riemann ゼータ値などを用いて記述することに成功した。実際、ゼータ値にワイル群を作用させた和を考えるが、その和が 0 になってしまう場合もあり得る。その判定をするのにポアンカレ多項式の利用が重要な点である。
- (2) 既知の Arakawa-Kaneko 型関数、関数のレベル2類似として、Arakawa-Kaneko 型関数を構成した。これは佐々木義卓氏の研究をベースにして、その多重 index 版を考えていることに対応している。主なる手法は、Mellin 変換と呼ばれる積分表示であるが、被積分関数にはレベル2の多重対数関数が含まれており、その反復積分表示を利用することが重要な点となっている。実際、積分表示を2通りに変形することで、その特殊値の間の関係式を与える。
- (3) 数論的関数、とくにマンゴルト関数やメビウス関数など、Riemann ゼータ関数の零点分布の研究で重要となる関数に付随する二重 Dirichlet 級数について、ある種の積分表示を構成し、その積分路を変形することで、これまで知られていない特殊値の表示を求める。
- (4) 古典的なテータ関数の Jacobi 恒等式を利用して、Riemann ゼータ関数の積分表示を変形することで、特殊値の新しい級数表示を与える。これは Ramanujan が全く別の方法で証明したもののある種の拡張を与える。
- (5) 対称化ポリベルヌーイ数の2変数の母関数を構成して、それに微分作用素を作用させることで、新たな双対公式を証明する。実際、Stirling 数を用いた表示が有効で、第一種、第二種の Stirling 数同時に現れるような表示を経由することで、きれいな対称性が得られる。

4. 研究成果

- (1) 連携研究者の小森氏、松本氏とともに、多変数 Witten ゼータ関数の特殊値を多重ベルヌーイ多項式の反復積分を用いて計算し、非自明な表示公式を導出した。実際、この式が $0=0$ という自明な関係式になる場合もあり得るが、その判定がポアンカレ多項式を経由すればきちんと判断することができる。この結果として、これまで知られていなかった特殊値を計算することができた。この結果は以下の論文として出版された：

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta-functions of root systems and Poincaré polynomials of Weyl groups, *Tohoku Math. J.* 72 (2020), 87-126.

さらに、これまでの研究の overview と、さらに新たな成果として、多変数 Witten ゼータ関数のこれまで知られていなかった関数関係式の導出に関してまとめた次の論文も出版された：

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, An overview and supplements to the theory of functional relations for zeta-functions of root systems, in *Various Aspects of Multiple Zeta Functions*, *Adv. Stud. Pure Math.* 84, 2020, pp. 263-295.

これらの結果は、今後体系的にまとめて、3人による共著として、専門書の執筆を検討している。

(2) 金子昌信氏との共同研究により Arakawa-Kaneko 型 関数を構成し、そのコンタワー積分表示による解析接続を示し、負の整数点では多重ポリコセカント数が現れることを示した。その一方で、正の整数点では、レベル 2 の多重対数関数の反復積分表示を離党することで、レベル 2 の多重ゼータ値である多重 T 値の有限和として表示できることが示された。さらに積分表示の積分変数を変換することで、正の整数点での値の別の形の多重 T 値による表示が得られ、それらを合わせることで新しい関係式が得られることが分かった。これらの結果は以下の論文として出版された：

M. Kaneko and H. Tsumura, Zeta functions connecting multiple zeta values and poly-Bernoulli numbers, in Various Aspects of Multiple Zeta Functions, Adv. Stud. Pure Math. 84, 2020, pp. 181-204.

さらに、多重 T 値の間の重み付き和公式や双対公式と呼ばれるものを証明し、その結果は以下の論文として出版された：

M. Kaneko and H. Tsumura, On multiple zeta values of level two, Tsukuba J. Math. 44 (2020), 213-234.

この中では、膨大な数値実験によって、多重 T 値の張る有理数体上の空間の次元に関する予想を提出し、さらに関連するいくつかの予想を提出した。これらは通常の高次元の結果の類似とも見られることから、その重要性は期待できる。

(3) 連携研究者の松本氏および苗代暁彦氏との共同研究によって、数論的関数に付随する二重 Dirichlet 級数の広いクラスに関する解析接続、およびその特殊値の表示式を与えることに成功した。これらは例えばマンゴルト関数についての江上繁樹氏と松本氏の先行研究により、古典的なゴールドバッハ予想との関連も知られており、今回の結果が重要な視点を与えていると思われる。実際、特別な場合はいわゆる素数定理の証明とも関連しており、素数分布に関する解析的アプローチの 1 つの視点を与えた結果であると考えられる。この結果は以下の論文として出版された：

K. Matsumoto and A. Nawashiro and H. Tsumura, Double Dirichlet series associated with arithmetic functions, Kodai Math. J. 44 (2021), 437-456.

(4) 古典的なゼータ関数の Jacobi 恒等式を利用して、様々なゼータ関数の関数等式が証明されているが、本研究ではそれを利用して、Riemann ゼータ関数の奇数値の級数表示を与えた。これは Ramanujan の公式を含んだ Berndt の公式のさらなる一般化になっている。Berndt は Eisenstein 級数の満たす関係式から公式を導いているが、本研究ではゼータ関数の Jacobi 恒等式を利用して証明を与えていることから、より広いクラスのゼータ関数への適用が可能になると考えられる。実際、前課題において、双曲線関数に付随する Cauchy のゼータ関数の多重化に相当することで関連結果を導出していた。その手法を少し変形することで、Riemann ゼータ値の公式を一般化することが可能になった。この結果は以下の論文として出版された：

H. Tsumura, On series identities arising from Jacobi's identity of the theta function, Int. J. Number Theory 14 (2018), 1317-1327.

(5) 対称化ポリベルヌーイ数は本研究において定義され、それによる双対公式が証明された。この一般化は意味のある結果で、その後の Benyi-Matsusaka などの研究においてもその組み合わせ論的な解釈などが与えられている。また Komori-Tsumura による差分作用素を用いた表示なども得られている。その本質は、2 変数の対称化ポリベルヌーイ数の母関数が、きれいな対称性を持つことに起因している。この結果は以下の論文として出版された：

M. Kaneko, F. Sakurai and H. Tsumura, On a duality formula for certain sums of values of poly-Bernoulli polynomials and its application, J. Theor. Nombres Bordeaux 30 (2018), 203-218.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Yasushi Komori, Kohji Matsumoto and Hirofumi Tsumura	4. 巻 72
2. 論文標題 Zeta-functions of root systems and Poincare polynomials of Weyl groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 87-126
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2748/tmj/1585101623	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masanobu Kaneko, Maneka Pallewatta and Hirofumi Tsumura	4. 巻 23
2. 論文標題 On Polycosecant Numbers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Integer Sequences	6. 最初と最後の頁 1-17
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Yasushi Komori, Kohji Matsumoto and Hirofumi Tsumura	4. 巻 84
2. 論文標題 An overview and supplements to the theory of functional relations for zeta-functions of root systems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 263-295
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/aspm/08410263	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masanobu Kaneko and Hirofumi Tsumura	4. 巻 84
2. 論文標題 Zeta functions connecting multiple zeta values and poly-Bernoulli numbers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 181-204
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/aspm/08410181	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masanobu Kaneko and Hirofumi Tsumura	4. 巻 44
2. 論文標題 On multiple zeta values of level two	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tsukuba Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 213-234
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsumoto Kohji, Nawashiro Akihiko and Tsumura Hirofumi	4. 巻 44
2. 論文標題 Double Dirichlet series associated with arithmetic functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 437-456
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2996/kmj/kmj44303	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Hirofumi Tsumura
2. 発表標題 Variants of the Arakawa-Kaneko zeta function
3. 学会等名 第15回多重ゼータ研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hirofumi Tsumura
2. 発表標題 Variants of poly-Bernoulli numbers
3. 学会等名 第3回 青葉山ゼータ研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 H. Tsumura
2. 発表標題 Poly-Bernoulli numbers of level 2 and related zeta functions
3. 学会等名 RIMS symposium `Analytic Number Theory and Related Topics' (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 津村博文
2. 発表標題 数論的関数に付随する多重ディリクレ級数について
3. 学会等名 2018大分鹿児島整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 津村博文
2. 発表標題 Another type of poly-Euler numbers and related zeta functions
3. 学会等名 第15回ゼータ若手研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

東京都立大学 教員紹介
<https://www.tmu.ac.jp/stafflist/data/ta/635.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	小森 靖 (Komori Yasushi) (80343200)	立教大学・理学部・教授 (32686)	
連携研究者	松本 耕二 (Matsumoto Kohji) (60192754)	名古屋大学・多元数理科学研究科・教授 (13901)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関