

令和 4 年 6 月 16 日現在

機関番号：24403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03220

研究課題名(和文)tame非可換射影多様体の幾何学とそれに付随する表現論の研究

研究課題名(英文)tame noncommutative projective schemes and related representation

研究代表者

源 泰幸 (Minamoto, Hiroyuki)

大阪府立大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：50527885

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：当初の計画は、tame非可換射影多様体(=次数付きネター代数の非可換射影スキーム)の一般論を研究することであった。しかし、研究序盤に籠Heisenberg代数(QHA)という代数をM.Herschend氏との共同研究の中で発見し、これが次数付きネター代数の具体例としても有望であるために、その研究に注力した。QHAに変形パラメータを導入し、標数が一般の場合に普遍Auslander-Reiten三角さらには根基幕近似定理等、興味深い性質を明らかにすることに成功し、Etingof-RainsによるDynkin籠に対するQHAの次元公式を標数の仮定を外し、道代数上の加群の同型に格上げすることが出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

籠Qから構成される前射影的代数は籠の表現論から産み出された。Lie理論、代数幾何、数理物理にも現れる重要な数学的対象である。今回の研究では籠Heisenberg代数も道代数の表現論から産み出され、そして前射影的代数の一次元高い類似的性質を持つことを明らかにした。前射影的代数と同様に籠Heisenberg代数も重要な数学的対象であることが期待できる。

研究成果の概要(英文)：Originally I planed to investigate general theory of tame noncommutative projective scheme (=noncommutative projective schemes of graded Noetherian algebras). However, at the beginning stage, I found a class of algebras, so called Quiver Heisenberg algebras (QHA), in the collaboration with M. Herschend. Since it was expected to provide a nice and important class of graded Noetherian algebras, I have mainly studied QHA throughout this period. I introduced deformation parameter to QHA and by making use of this parameter, I was able to establish many result among other things universal Auslander-Reiten triangle and approximation by powers of the radical functors theorem over a field of arbitrary characteristic. In particular these result can be looked as a categorification of dimension formula of QHA of Dynkin quivers by Etingof-Rains.

研究分野：代数学

キーワード：前射影的代数 籠Heisenberg代数 非可換射影スキーム

## 1. 研究開始当初の背景

当初の計画は、tame 非可換射影多様体 (= 次数付きネター代数の非可換射影スキーム) の一般論を研究することであった。しかし、研究序盤に籠 Heisenberg 代数 (QHA) という代数を M. Herschend 氏との共同研究の中で発見し、これが次数付きネター代数の具体例としても有望であるために、その研究に注力した。QHA は Etingof-Rains が量子群の手法を研究した代数や、Cachazo-Katz-Vafa により  $N=1$  クイバーゲージ理論から導入された代数の特別な場合と判明した。しかし、先行研究では籠が Dynkin または Extended Dynkin の場合が主に研究されていたが、今回の研究では一般の籠を研究対象とした。また、先行研究では基礎体は標数 0 と仮定されている場合が殆どだったが、今回の研究では標数に仮定を置かずに研究を行った。

## 2. 研究の目的

次数付きネター代数の具体例として籠 Heisenberg 代数 (QHA) とそれに付随して定義される代数  $B(Q)$  の性質を詳しく調べることである。また、QHA は道代数の表現論とも密接に関わっている様なので、それを明らかにすることも研究の目的であった。

また、QHA の性質を明らかにする過程で、導来前射影的代数、 $n$  角圏の Grothendieck 群の一般論を研究した。

## 3. 研究の方法

籠 Heisenberg 代数の導来版である導来籠 Heisenberg 代数を導入し、それが道代数の導来圏と関わる様子を調べる。特に根基関手  $\text{rad}$  のベキとの関係を調べる。また、重要な不変量として籠 Heisenberg 代数の定義に現れるパラメーターから荷重トレース、荷重 Euler 標数を導入する。荷重 Euler 標数は整数であるが、その基礎体での値が重要な役割を果たし、これが任意標数の体上で研究を進める上での鍵となった。

## 4. 研究成果

M. Herschend 氏との共同研究において前射影的代数の中心拡大のあるクラスを籠 Heisenberg 代数 (Quiver Heisenberg Algebras, 以下 QHA) の研究を進めた。研究が進展したのちに、QHA は Etingof-Rains が量子群の手法を研究した代数や、Cachazo-Katz-Vafa により  $N=1$  クイバーゲージ理論から導入された代数の特別な場合と判明した。しかし、先行研究では籠が Dynkin または Extended Dynkin の場合が主に研究されていたが、今回の研究では一般の籠を研究対象とした。また、先行研究では基礎体は標数 0 と仮定されている場合が殆どだったが、今回の研究では標数の仮定無しに研究を行った。

標数 0 の場合は Dynkin 籠にたいする QHA の次元は Etingof-Rains により計算されていた。今回の研究では後述の一般的な結果から任意標数の場合に QHA の道代数上の加群としての直既約分解を与えた。その次元を計算することで Etingof-Rains の次元公式が得られるのである。つまり、標数 0 の場合に示されていた次元公式を任意標数の場合に加群の直既約分解に格上げできたのである。

研究当初は籠にたいして一意に定まった関係式のみを考えていたが、研究が進展するに従い籠 Heisenberg 代数の定義式にパラメーターを導入することが自然であることが明らかになってきたので、そうした。パラメーターは籠の各頂点ごとに 0 でないスカラーを対応させるものであり重さと呼ぶことにした。この重さから道代数の加群や複体の荷重 Euler 標数の概念を導入した。また、QHA の研究にはその導来版である導来籠 Heisenberg 代数 (Derived Quiver Heisenberg algebras, 以下 DQHA) を用いることが必須である。標数が 2 でない場合は DQHA は籠とポテンシャルから定義される Ginzburg 微分次数付き代数である。標数 2 の場合には対応するポテンシャルは存在しないが、Ginzburg 微分次数付き代数の定義はそのまま機能するので、それを DQHA の定義に用いるのである。

最初の特筆すべき結果は、普遍 Auslander-Reiten (AR) 三角である。これは道代数上の両側加群の複体の完全三角であり、直既約 (片側) 加群  $M$  とのテンソル積をとると  $M$  から始まる Auslander-Reiten 三角が得られるものである。普遍 AR 三角の第一項は道代数自身であり、第三項は導来前射影的代数の 1 次部分加群であるのは当然のことだが、要点は、第二項つまり AR 三角の中間項が DQHA の 1 次部分加群によるテンソル積で与えられることである。

AR 三角の射は根基関手  $\text{rad}$  による (然るべき意味での) 近似である。普遍 AR 三角は QHA の 1 次部分が  $\text{rad}$  近似を与えることを主張する。2 以上の自然数  $n$  にたいして QHA の  $n$  次部分が根基関手の  $n$  乗  $\text{rad}^n$  による近似を与えることを示した。この結果を道代数自身を片側加群と

みなしたものに適用することで、上述の QHA の道代数加群としての直和分解が得られる。

近似には右近似と左近似がある。根基関手の  $n$  乗の左近似が網目関係式（前射影的代数の関係式）の  $n$  乗による掛け算で与えられるというのは自然な予想であり、実際に  $n=1$  の場合には普遍 AR 三角により予想は正しいのである。しかし、これは楽観的に過ぎて、 $n=2$  の場合ですら正しくはないことがわかった。

しかし、 $n=2$  の場合には網目関係式の 2 乗が左近似を与えるためのパラメーターに関する十分条件を見出した。 $A_3$  クイバーの場合にはこれが必要条件でもあることを確かめた。

一般の  $n$  にたいしては必要条件すら見つけられなかったが、標数 0 の体上では一般のパラメーターにたいして網目関係式の  $n$  乗が根基関手の  $n$  乗に関する左近似を与えることを示した。

QHA から有限次元代数  $B(Q)$  を構成し、道代数  $KQ$  の 1 次元高いバージョンとみなせる性質を持っていることを明らかにした。

例えば、 $KQ$  が有限表現型 or 無限表現型であるかは籠が Dynkin or non-Dynkin であるかに同値である、というのは Gabriel による代数の表現論の古典的な結果であるが、今回の研究では  $B(Q)$  が 2-有限表現型 or 2-無限表現型であるかは籠が Dynkin or non-Dynkin であるかに同値である、ことを示した。

また、 $B(Q)$  の 2-APR 傾関手の性質や道代数の 1-APR 傾関手との関係を明らかにするために derived preprojective algebras の APR 型の傾関手の一般論を整備した。この結果は  $KQ$ ,  $B(Q)$  に限らず広い範囲の代数に適用可能である。

上述の一般論を用いて  $B(Q)$  の導来圏から  $KQ$  の導来圏への関手で APR 傾関手と整合的なものを構成した。Dynkin 型の場合は四角圏から三角圏への完全関手と呼ぶべきものが得られる。Grothendieck 群のレベルで見ると  $B(Q)$  のクラスタールートから  $KQ$  の（正とは限らない）ルートへの全単射を与えることが分かった。このことから、 $B(Q)$  はルート系と深く関わりを持つことが期待できる。

QHA の研究において普遍 Auslander-Reiten 三角という道代数  $KQ$  上の両側加群の複体の完全三角を見出していった。これを道代数から homologically smooth かつ proper な DG 代数に一般化した。道代数の場合はセール双対を具体的に計算することで結果を得たのであるが、一般化に際してはセール双対と向井 paring の相互律を用いて、向井 paring に関する Riemann-Roch 型の定理 (Shklyarov, Polishchuk) に帰着した。

QHA は道代数  $KQ$  上のある graded coring の Koszul 双対として得られるのであるが、その構成が homologically smooth な DG 代数に一般化できることを示した。これは Keller による導来 Calabi-Yau 完備化の一般化であり、かつ、Frobenisu 代数と Artin-Schelter 代数が Koszul 双対で対応する Paul Smith の結果の部分的な一般化である。

代数多様体上の接続層が局所自由であるためにはファイバーの次元が点に依らず一定であることが必要十分条件であることは良く知られている。この条件は、各点でのファイバーが全て基礎体  $k$  上の加群として同型である、と言い換えられる。

この主張を代数多様体上の接続層から、非可換環の層に対する接続加群に関する主張に一般化した。これは籠 Heisenberg 代数の研究への応用のために示したものであるが、他の応用も期待できる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Minamoto Hiroyuki, Yamaura Kota	4. 巻 565
2. 論文標題 The Happel functor and homologically well-graded Iwanaga-Gorenstein algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 441 ~ 488
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.08.021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Minamoto Hiroyuki, Yamaura Kota	4. 巻 373
2. 論文標題 On finitely graded Iwanaga-Gorenstein algebras and the stable categories of their (graded) Cohen-Macaulay modules	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107228 ~ 107228
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2020.107228	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Minamoto Hiroyuki	4. 巻 -
2. 論文標題 Homological identities and dualizing complexes of commutative differential graded algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-36
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-021-2095-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Minamoto Hiroyuki, Yamaura Kota	4. 巻 224
2. 論文標題 Homological dimension formulas for trivial extension algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 106344 ~ 106344
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2020.106344	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hiroyuki Minamoto	4. 巻 51
2. 論文標題 Resolution of DG-modules.	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 51st Symposium on Ring Theory and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 76-81
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Hiroyuki Minamoto
2. 発表標題 Quiver Heisenberg Algebras
3. 学会等名 International Conferences on Representations of Algebras 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiroyuki Minamoto
2. 発表標題 On a cubical generalization of preprojective algebras
3. 学会等名 The Eighth China - Japan - Korea International Symposium on Ring Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroyuki Minamoto
2. 発表標題 On a cubical analogue of preprojective algebras
3. 学会等名 Tilting theory, Singularity Categories, & Noncommutative Resolutions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroyuki Minamoto
2. 発表標題 quiver Heisenberg algebras
3. 学会等名 Noncommutative Algebraic Geometry Shanghai Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroyuki Minamoto
2. 発表標題 quiver Heisenberg algebras
3. 学会等名 Representation Theory of Quivers and Finite Dimensional Algebras 19 Jan - 25 Jan 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 源泰幸
2. 発表標題 可換微分次数付Gorenstein 代数について
3. 学会等名 第31回可換環論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 源泰幸
2. 発表標題 On finitely graded IG-algebras and their (graded) CM-modules
3. 学会等名 Homological and homotopical tools in category theory with applications to an Algebraic Geometry, Representation theory and Module Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 源泰幸
2. 発表標題 Resolutions of DG-modules
3. 学会等名 第 5 1 回環論および表現論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 源泰幸
2. 発表標題 On finitely graded IG-algebras and their (graded) CM-modules
3. 学会等名 International Conference on Representations of Algebras (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関