

令和 5 年 6 月 21 日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03223

研究課題名(和文) Schur多重ゼータ関数の挙動の研究

研究課題名(英文) A study on the behavior of Schur multiple zeta functions

研究代表者

中筋 麻貴 (NAKASUJI, Maki)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：30609871

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：Schur多重ゼータ関数の組合せ論的側面として、Pieri型の定理およびShuffle積表示を得た。また、数論的側面として、双対公式とその一般化(大野関係式)を得た。さらにSchur型大野関係式を決める大野関数を定義し、その複素補間に成功した。また、応用的側面として、ルート系ゼータ関数との関係解明、およびその応用として既存のワイル群多重ゼータ関数間の関係式の予想への貢献や、Schur関数を含む対称関数へのさらなる拡張について成果を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究成果は、Schur関数と類似の構造をもつ多重ゼータ関数が、Schur関数と同じ規則がなりたつこと、および多重ゼータ関数の性質の拡張が可能であることを示したことである。Schur関数は表現論および組合せ論における主要な研究対象であり、ゼータ関数やその多変数化である多重ゼータ関数は整数論における重要な研究対象である。これらの2つの研究分野について直接的な関係性は未解決であるが、本研究により研究手法の相互利用が可能であるということが示唆でき、大変有意義な成果が得られたと言える。

研究成果の概要(英文)：As combinatorial aspects of Schur multiple zeta functions, we obtained Pieri type formula and Shuffle product formula. As for the number theory aspects, (3) the dual formula and (4) its generalization called Ohno relation were obtained. Furthermore, we defined the Ohno function that determines the Schur-type Ohno relation, and succeeded in its complex interpolation. In addition, as an applied aspect, we have clarified the relationship with the zeta function of root system, contributed to the prediction of the relational expression between the Weyl group multiple zeta functions, and have extended it to functions with similar structures to symmetric functions including the Schur function..

研究分野：数論

キーワード：Schur多重ゼータ関数 Pieri法則 Shuffle積表示 双対公式 大野関係式 ルート系ゼータ関数 対称多重ゼータ関数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の研究対象となるSchur多重ゼータ関数は、2016年に研究代表者、Ouamporn Phuksuwan氏 (Chulalongkorn大学)、山崎義徳氏 (愛媛大学) が導入した新しい多変数関数である。本関数は、解析数論の研究対象である多重ゼータ関数を組合せ論的に拡張したものであり、表現論において重要なSchur関数と類似の構造を持つ。特に、分割の形を制限することによりEuler-Zagier型多重ゼータ関数が得られ、変数を制限することにより特別な形のSchur関数が現れることから、どちらの関数の拡張でもあることが特徴である。2018年に出版された先行研究 (Advances in Mathematics, 333, 2018, 以下[NPY]と略す) では、収束性や解析接続などの基本的性質の多くは多重ゼータ関数のそれと類似したものが成り立つことや、Schur関数の特徴であるJacobi-Trudi公式、Giambelli公式、dual Cauchy公式といった行列式表示が成り立つことが確認できていた。一方、拡張によって成立しなくなった性質の解明や、各関数の理論において研究されてきた様々な関係式が同様に成り立つかは未解決であった。本研究は多重ゼータ関数、Schur関数の両理論の関係構築に貢献するものであり、これを利用して各々の関数およびその周辺の性質の解明に対する新しい展望を開くことが期待できるため、双方の理論にとって非常に重要な研究であると考えられた。

## 2. 研究の目的

本研究ではこのSchur多重ゼータ関数を研究対象として、未解決となっている性質や挙動を研究してゆく。また新しい理論の構築、およびその応用として、多重ゼータ関数とSchur関数のそれぞれの理論に対する新たな展望を開くことを目指す。

## 3. 研究の方法

本研究では、以下の2つに分類して研究をすすめた。

### [1] Schur多重ゼータ関数の数論的性質および組合せ論的性質の研究の解明

Euler-Zagier型多重ゼータ関数とSchur関数についてそれぞれの理論で成立していた事柄の類似が、Schur多重ゼータ関数に対して同様に成り立つかどうかを検証した。

### [2] 分野をまたぐ未解決問題へのSchur多重ゼータ関数の寄与の検証

Schur多重ゼータ関数の基となる関数とは異なる研究対象との関係について検証した。

また、その系として、従来より関係性が指摘されつつ未解決となっている数論および表現論の双方に関わる問題への応用が可能かを検証した。

## 4. 研究成果

[1] (i) 研究代表者と武田渉氏 (東京理科大学) との共同研究により、[NPY]で得られたJacobi-Trudi公式の拡張を行い、その系としてSchur関数において知られるPieri公式の類似がある種のSchur多重ゼータ関数に対して成り立つことを示した。本研究では、Schur関数に対するPieri公式と異なり、新しく増える変数の追加される位置が問題となった。これに対し、新たにPushing ruleという規則を導入することにより、明示式を得ることに成功した。

(ii) 研究代表者と大野泰生氏 (東北大学) との共同研究により、Euler-Zagier型多重ゼータ関数

において成り立つ双対公式および大野関係式をSchur多重ゼータ関数に拡張する研究に取り組み、先行結果で得られたSchur多重ゼータ関数のJacobi-Trudi公式を用いることで結果を得た。

(iii) 研究代表者、武田渉氏（東京理科大学）および大野泰生氏（東北大学）との共同研究において、Schur多重ゼータ関数の大野関係式を複素補完した大野関数を得ることに成功した。

(vi) Euler-Zagier型の多重ゼータ関数には、harmonic積、shuffle積といった2種類の積構造が入る。これに対し、Schur多重ゼータ関数にはharmonic積しか持たない。武田渉氏（東京理科大学）との共同研究において、shuffle積の構造をいれるための問題点を明らかにし、Factorial Schur多重ゼータ関数の導入により、この問題点を解決することに成功した。

[2] 研究代表者と松本耕二氏（名古屋大学）との共同研究において、リー群やリー環の理論におけるルート系の元で定義されるルート系のゼータ関数と、Schur多重ゼータ関数について、それぞれの型を限定することで関係式を得た。具体的には、ある種のSchur多重ゼータ関数をフルピッツ型のルート系のゼータ関数を用いた表示を得た。さらに、この表示が、Brubaker-Bump-Chinta-Friedberg-Hoffstein(2006)によって定義されたワイル群ディリクレ級数の類似とみなすことができる予想した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Eren Mehmet Kiral and Maki Nakasuji	4. 巻 403
2. 論文標題 Parametrization of Kloosterman sets and SL3-Kloosterman sums	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Maki Nakasuji and Wataru Takeda	4. 巻 191
2. 論文標題 Pieri formulas for hook type Schur multiple zeta functions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Maki Nakasuji, Yasuo Ohno and Wataru Takeda	4. 巻 -
2. 論文標題 An interpolation of the generalized duality formula for the Schur multiple zeta values to complex functions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 中筋麻貴	4. 巻 -
2. 論文標題 Schur多重ゼータ関数の大野関係式と大野関数	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 「第15回数論女性の集まり」報告集	6. 最初と最後の頁 55-61
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 中筋麻貴	4. 巻 -
2. 論文標題 Schur多重ゼータ関数とルート系のゼータ関数	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 「第14回数論女性の集まり」報告集	6. 最初と最後の頁 38-45
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kohji Matsumoto and Maki Nakasuji	4. 巻 98
2. 論文標題 Expressions of Schur multiple zeta-functions of anti-hook type by zeta-functions of root systems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Publicationes Mathematicae Debrecen	6. 最初と最後の頁 345-377
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 中筋麻貴	4. 巻 -
2. 論文標題 Schur型多重ベルヌーイ数について	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 「第12回数論女性の集まり」報告集	6. 最初と最後の頁 52-58
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Maki Nakasuji	4. 巻 2160
2. 論文標題 Schur multiple zeta-functions of anti-hook type and zeta-functions of root systems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 202-213
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Eren Mehmet Kiral and Maki Nakasuji	4. 巻 2162
2. 論文標題 Parametrization of Kloosterman sets and SL <sub>3</sub> -Kloosterman sums	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 170-184
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 中筋麻貴	4. 巻 1
2. 論文標題 Kazhdan-Lusztig R-polynomialとCasselman基底に関する変換係数について	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 「第11回数論女性の集まり」報告集	6. 最初と最後の頁 54-60
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 中筋麻貴	4. 巻 1
2. 論文標題 Schur多重ゼータ関数とその特殊値について	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 第63回代数学シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 27-38
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Maki Nakasuji, Ouamporn Phuksuwan and Yoshinori Yamasaki	4. 巻 333
2. 論文標題 On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 570-619
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計24件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 Schur多重ゼータ関数の大野関係式と大野関数
3. 学会等名 研究集会「第15回数論女性の集まり」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 Schur P型, Schur Q型 多重ゼータ関数の導入
3. 学会等名 愛媛大学代数セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 武田渉, 中筋麻貴
2. 発表標題 Schur Q型多重ゼータ関数のPfaffian表示
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 武田渉, 大野泰生, 中筋麻貴
2. 発表標題 Schur 多重ゼータ値の一般化双対公式の複素補間
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 対称関数と類似構造をもつ多重ゼータ関数について
3. 学会等名 解析数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 対称関数の理論の多重ゼータ関数への応用
3. 学会等名 東北大学理学研究科数学専攻談話会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 武田渉, 中筋麻貴, 山崎義徳
2. 発表標題 Quadratic relations for 9th variation Schur functions involving Plucker relations
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 Schur多重ゼータ関数とルート系のゼータ関数
3. 学会等名 研究集会「第14回数論女性の集まり」
4. 発表年 2021年



1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 Duality formula and Ohno-relation for Schur multiple zeta values
3. 学会等名 第57回関西多重ゼータ研究会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 Schur多重ゼータ関数のPieri公式と大野関係式
3. 学会等名 熊本大学数学教室談話会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 武田渉, 中筋麻貴
2. 発表標題 Schur多重ゼータ関数に対するJacobi-Trudi 公式のある種の拡張とその応用
3. 学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 Schur多重ゼータ関数におけるJacobi-Trudi 公式の応用
3. 学会等名 早稲田大学整数論研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中筋麻貴, 大野泰生
2. 発表標題 Schur多重ゼータ値の双対公式とその拡張
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 武田渉, 中筋麻貴
2. 発表標題 Hook型Schur多重ゼータ値のShuffle積
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 馬場結菜, 中筋麻貴
2. 発表標題 Schur型多重Polyベルヌーイ数
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Maki Nakasuji
2. 発表標題 Schur multiple zeta functions and their properties
3. 学会等名 Heilbronn number theory seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 Schur型多重ベルヌーイ数について
3. 学会等名 第12回数論女性の集まり
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 Factorial Schur 多重ゼータ関数の行列式表示
3. 学会等名 明学数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Maki Nakasuji
2. 発表標題 Schur multiple zeta-functions of anti-hook type and zeta-functions of root systems
3. 学会等名 数理解析研究所研究集会「多重ゼータ値の諸相」（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Maki Nakasuji
2. 発表標題 Casselman's basis of Iwahori vectors and Kazhdan-Lusztig polynomials
3. 学会等名 Automorphic forms on reductive groups and their covers: A conference in honour of Solomon Friedberg (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 Kazhdan-Lusztig R-polynomialとCasselman基底に関する変換係数について
3. 学会等名 第11回数論女性の集まり
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 Anti-hook型Schur多重ゼータ関数のルート系ゼータ関数を用いた表示
3. 学会等名 第41回関西多重ゼータ研究会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 hook Schur型多重ベルヌーイ数
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中筋麻貴
2. 発表標題 Schur多重ゼータ関数とその特殊値について
3. 学会等名 第63回代数数学シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	松本 耕二  (MATSUMOTO Kohji)		
研究協力者	大野 泰生  (OHNO Yasuo)		
研究協力者	山崎 義徳  (YAMASAKI Yoshinori)		
研究協力者	武田 渉  (TAKEDA Wataru)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------