様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　５月１４日現在

機関番号：３２６８２

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：１８Ｋ０３２２６

研究課題名（和文）モノミアル曲線の定義イデアルのシンボリックリース環の有限生成性について

研究課題名（英文）On finite generation of symbolic Rees rings of defining ideals of space monomial curves

研究代表者

蔵野　和彦（Kurano, Kazuhiko）

明治大学・理工学部・専任教授

研究者番号：９０２０５１８８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：a,b,c を二つずつが互いに素な自然数とし、I をモノミアル曲線（t^a,t^b,t^c）の定義イデアルとする。シンボリックリース環 R_s（I）はいつ有限生成になるかを知りたい。基礎体 K の標数は 0 であり,C.E=1 を満たす negative curve C が存在すると仮定する。このとき、R_s（I）が有限生成であるための必要十分条件は、条件 EU であることがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義
可換環論では、近年シンボリック冪の研究がさかんに行われている。中でもモノミアル曲線(t^a,t^b,t^c）の定義イデアルのシンボリックリース環は可換環論において古くから研究対象になってきた。また、このシンボリックリース環はある射影代数曲面の Cox 環と一致するのであるが、Cox 環の有限生成性は双有理幾何と非常に深く結びついている。このこともあって、以前からこの問題に関して様々な研究が行われてきた。今回の結果により、永田予想の解決へ近づいたと言える。

研究成果の概要（英文）：Let a, b, c be pairwise coprime natural numbers. Let I be the defining ideal of the monomial curve (t^a,t^b,t^c). We want to know when the symbolic Rees ring R_s(I) is fintely generated. Assume that the characteristic of the base field K is 0, and there exists a negative curve C satisfying C.E=1. Then we proved that R_s(I) is finitely generated if and only if the condition EU is satisfied.

研究分野：可換環論

キーワード：シンボリックリース環　Cox 環　モノミアル曲線

１．研究開始当初の背景

可換環 A、その素イデアル J と自然数 n に対して、$J^{(n)} = J^n A_J \cap A$ と定義して、これを素イデアル J の n 階のシンボリック冪という。シンボリック冪は古くから研究対象であったが、最近はイデアルの密着閉包や整閉包の理論とも結びついて、シンボリック冪に話題を絞った国際研究集会が開催されるなど非常に活発に研究されている。可換環 A とその素イデアル J に対して、シンボリック冪は $J^{(m)}J^{(n)} \subset J^{(m+n)}$ を満たすので、

$$A \oplus JT \oplus J^{(2)}T^2 \oplus J^{(3)}T^3 \oplus \cdots$$

は自然に多項式環 $A[T]$ の部分環になる ($J^{(1)} = J$ に注意)。この環を $R_s(J)$ と書き、これを J のシンボリックリース環ということにする。$R_s(J)$ は A 上環として有限生成とは限らない。$R_s(J)$ の有限生成性は非常に興味深い問題であり、J の集合論的完全交叉性や双有理幾何とも結びついている。

２．研究の目的

体 K 上の多項式環 $S = K[x, y, z]$ の中で、モノミアル曲線 (t^a, t^b, t^c) の定義イデアル I を考え、そのシンボリックリース環 $R_s(I) = \oplus_{n \geq 0} I^{(n)}T^n$ がいつ S 上環として有限生成になるかを調べることが目標である。$R_s(I)$ はある射影代数多様体 Y の Cox 環と (ほぼ) 同型である。Cox 環が有限生成である多様体は ＭＤＳ (森夢空間) と呼ばれ、双有理幾何の観点から見て非常に性質が良い。また、$R_s(I)$ の有限生成性は永田予想と呼ばれる未解決問題と関連があり、そのことからもこの問題の重要性がわかる。以下、具体的な目的について述べる。

[目的 1] モノミアル曲線の定義イデアル I のみを議論すると非常に窮屈であり、考える対象のカテゴリーを拡大する必要が出てきた。従って、３つの格子点を頂点とする平面上の三角形のエルハールト環を考え、それが定める射影多様体を一般的な一点で爆発させた多様体の Cox 環を考え、その Cox 環が有限生成になるための三角形の条件を求めたい。

[目的 2] 藏野-西田 [KN] で、ある "特殊な仮定" のもと、$R_s(I)$ が有限生成であるための (コンピューターによって十分に検証可能な) 必要十分条件を得ることができた。本研究の目的の一つは、その "特殊な仮定" を弱くする (なくす) ことである。また、その "特殊な仮定" のもと、コンピューターを使わなくてもできるような、簡明な必要十分条件を求めることにも取り組みたい。

３．研究の方法

以下、a, b, c を自然数とし、I をモノミアル曲線 (t^a, t^b, t^c) の定義イデアルとする。つまり、K を体として、$x \mapsto t^a$, $y \mapsto t^b$, $z \mapsto t^c$ で定義される K 代数射 $S = K[x, y, z] \to K[t]$ の核を I とする。シンボリックリース環 $R_s(I)$ が有限生成かどうかを調べることが本研究の大きな目的である。$R_s(I)$ が有限生成かどうかは、a, b, c と K の標数のみで決まることが知られている。$R_s(I)$ が有限生成になる例は多くある。有限生成でない例は、後藤-西田-渡辺 [GNW] によって最初に発見されたが、K の標数が $p(> 0)$ のときは今も見つかっていない。$R_s(I)$ の有限生成性は、次の永田予想と深く関係している。

永田予想：$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 上の一般的な n ($n \geq 10$ とする) 点をそれぞれ重複度 r 以上で通る曲線の次数は $r\sqrt{n}$ より大きい

永田予想が肯定的に解決されれば、(今まで見つかっていない) Seshadri 定数が無理数になる曲面が構成できるなど、代数幾何学にも大きな応用がある。本研究では、簡単のため、a, b, c は二つずつが互いに素で、abc は平方数ではないと仮定する。$R_s(I)$ の有限生成性に関して、次の Huneke-Cutkosky ([H], [C]) の判定法がある。Proj(S) の一点 $V(I)$ での爆発を $f : Y \to \mathrm{Proj}(S)$ とし、E を例外曲線とする。点 $V(I)$ は Proj(S)

の非特異点であるので Y は正規射影曲面であり、よって有理数係数の交点数が定まる。この状況で、$R_s(I)$ が有限生成であるための必要十分条件は、次の (F1) と (F2) が成立することである。

(F1) E と異なる曲線 C で、$C^2 < 0$ を満たすものが存在する。(この状況では、このような C は存在すれば一意的である。これを negative curve ということにする。)

(F2) 上の C と交わらない曲線 D が存在する。(つまり、$C.D = 0$ をみたす。この D は一意的ではない。)

幾何の言葉を使えば、(F2) はある nef 因子が semi-ample 因子になるかどうかを表していて、多様体の Seshadri 定数と関係がある。係数体 K の標数が正の場合は、上の (F1) が満たされれば (F2) も自動的に満たされる (Cutkosky [C])。よって K の標数が正の場合は、$R_s(I)$ が有限生成であるための必要十分条件は、上の (F1) が成立することである。ある a, b, c とある体上で (F1) が不成立であれば、($\mathbb{C}$ 上で) 永田予想は $n = abc$ の場合に肯定的に証明される (Cutkosky-Kurano [CK])。よって、固定した a, b, c に対して、ある正標数の体 K 上で $R_s(I)$ が有限生成でなければ、$n = abc$ で ($\mathbb{C}$ 上で) 永田予想は正しい。n が平方数の場合は永田予想は正しく、そのことを用いて永田雅宜はヒルベルトの第１４問題の反例 [N] を構成した。n が平方数でない場合、永田予想は未解決である。永田予想は非常に簡明な主張であるので、多くの分野の数学者の興味の対象となっている。

[方法 1] モノミアル曲線から定まる三角形のみを考えるのではなく、一般に 3 頂点が格子点である平面上の三角形 Q のエルハールト環 $E(Q, T)$ を考え、$\mathrm{Proj}(E(Q, T))$ の一般的な点での爆発を Y とする。$R_s(I)$ の有限生成性を議論する代わりにに、考えるカテゴリーを広げて Y の Cox 環の有限生成性を議論する。まず最初に、イデアル I や環 $R_s(I)$ に関する様々な結果 (Huneke の判定法など) を、Y の Cox 環の場合に書き変える必要がある。

[方法 2] ここでは、K の標数は 0 であり、$C.E = 1$ を満たすある曲線 C が (F1) を満たすと仮定する。[KN] によって (F2) を満たす曲線 D が存在するかどうかはコンピューターで計算可能になったわけであるが、コンピューターを使わなくてもわかるような簡明な必要十分条件を求めたい。[KN] で、条件 EU と条件 GK という二つの概念を導入した。条件 EU は、$R_s(I)$ が有限生成であるための十分条件である（これは、He [He] でも独立に証明されている)。条件 GK は $R_s(I)$ が有限生成でないための十分条件である (これは、González-Karu [GK] によって証明された)。コンピューターによる計算で、条件 GK は有限生成でないための必要十分条件ではないことがわかった。条件 EU が $R_s(I)$ が有限生成であるための必要十分条件である可能性は残されている。条件 EU が有限生成であるための必要十分条件かどうかを確かめたい。

４．研究成果

[方法 1] に関しては、論文としてまとめてはいないが、とりあえず必要としていた結果を得ることができた。有理三角形のエルハールト環で定まるトーリック曲面を、一般的な一点で爆発させてできる代数多様体を Y とおく。モノミアル曲線の定義イデアル I は、S の変数の冪を成分として持つ 2×3 行列の 2 次小行列式で生成されたイデアルになる [Her]。Herzog の方法を真似ることによって、Y の Cox 環は、I と同じような形をしたイデアル J のシンボリックリース環と一致することが証明できた。J は高さ 2 のパーフェクトイデアルであるが、素イデアルとは限らない。J が素イデアルである必要十分条件は、Y の因子類群にねじれがないことであり、これは J があるモノミアル曲線の定義イデアルになることと同値である。また、Huneke-Cutkosky ([H], [C]) の判定法も、ほぼ同様なことが成立することが分かった。I と J で大きく違う点は、因子類群にねじれがあるため、Cox 環が UFD にならない点である。(UFD にならない例は簡単に構成できる。) I の場合は Y の因子類群は $\mathbb{Z}$ になり、Elizondo-Kurano-Watanabe [EKW] により Cox 環は UFD になる。ここが大きな違いである。しかし、Y の Cox 環の標準加群は、階数 1 の自由加群になるとい

う性質は、J の場合でも成立する。

その後の研究で negative curve map というものを考えているのだが、ここでの研究はその準備として非常に役に立った。

[方法 2] に関しては、稲川-藏野 [IK] によって、ほぼ肯定的に解決することができた。つまり、[方法 2] の状況で、$R_s(I)$ が有限生成であるための必要十分条件は EU 条件であることを証明することができた。その証明において重要な役割を果たしのは [K] で得られた結果である。negative curve は、外枠の三角形の面積と、その三角形の内部のローラン多項式の情報で決まる。[K] では、negative curve の三角形の内部のローラン多項式、それを r-nct と呼んでその性質を調べている。一番驚いた結果は、r-nct の Newton polygon の内点の格子点数は、$r(r-1)/2$ 以上であるという事実である。[K] の論文執筆中にはこの意味はよくわからなかったが、これは非常に重要な性質ではないかと感じていた。その直感は正しく、この結果が重要なカギとなって、[IK] での主定理の証明に繋がった。

参考文献

[C] S. D. Cutkosky, *Symbolic algebras of monomial primes*, J. reine angew. Math. **416** (1991), 71-89.

[EKW] E. J. Elizondo, K. Kurano and K.-i. Watanabe, *The total coordinate ring of a normal projective variety*, J. Algebra **276** (2004), 625–637.

[GK] J. L. González and K. Karu, *Some non-finitely generated Cox rings*, Compos. Math. **152** (2016), 984–996.

[GNW] S. Goto, K. Nishida and K.-i. Watanabe, *Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 383–392.

[He] Z. He, *New examples and non-examples of Mori dream spaces when blowing up toric surfaces*; arXiv:1703.00819, 2017.

[Her] J. Herzog, *Generators and relations of Abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math. **3** (1970), 175–193.

[Hu] C. Huneke, *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J. **34** (1987), 293–318.

[K] K. Kurano, *Equations of negative curves of blow-ups of Ehrhart rings of rational convex polygons*, J. Algebra **590** (2022), 413-438.

[K] T. Inagawa and K. Kurano, *Some necessary and sufficient condition for finite generation of symbolic Rees rings*, J. Algebra **619** (2023), 153-198.

[KN] K. Kurano and K. Nishida, *Infinitely generated symbolic Rees rings of space monomial curves having negative curves*, Michigan Math. J. **68** (2019), 405–445.

[N] M. Nagata, *On the 14-th Problem of Hilbert*, Amer. J. Math. **81** (1959) 766 – 772.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Kazuhiko Kurano	4．巻 590
2．論文標題 Equations of negative curves of blow-ups of Ehrhart rings of rational convex polygons	5．発行年 2022年
3．雑誌名 J. Algebra	6．最初と最後の頁 413-438
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2021.10.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kazuhiko Kurano, Kazuma Shimomoto	4．巻 61
2．論文標題 Ideal-adic completion of quasi-excellent rings (after Gabber)	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Kyoto J. Math.	6．最初と最後の頁 707-722
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2021-0011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 K. Kurano,　K. Nishida	4．巻 68
2．論文標題 Infinitely generated symbolic Rees rings of space monomial curves having negative curves	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Michigan Math. J.	6．最初と最後の頁 405-445
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1307/mmj/1557475399	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Y. Arai,　A. Echizenya,　K. Kurano	4．巻 44
2．論文標題 Demazure construction for Z^n-graded Krull domains	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Acta Math. Vietnam	6．最初と最後の頁 173-205
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40306-018-0281-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 K. Kurano, K. Shimomoto	4．巻 70
2．論文標題 An elementary proof of Cohen-Gabber theorem in the equal characteristic p > 0 case	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Tohoku Math. J.	6．最初と最後の頁 377-389
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.48550/arXiv.1510.03573	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 T. Inagawa, K. Kurano	4．巻 619
2．論文標題 Some necessary and sufficient condition for finite generation of symbolic Rees rings	5．発行年 2023年
3．雑誌名 J. Algebra	6．最初と最後の頁 153-198
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2022.11.022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　6件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 藏野和彦
2．発表標題 シンボリックリース環の有限生成性について
3．学会等名 第 33 回可換環論セミナー（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 藏野和彦
2．発表標題 シンボリック・リース環が有限生成になるためのある必要十分条件について
3．学会等名 大阪市立大学 「可換環論の新しい融合セミナー II」（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 藏野和彦
2．発表標題 Symbolic Rees rings of defining ideals of space monomial curves
3．学会等名 第65回 代数学シンポジウム（招待講演）
4．発表年 2020年

1．発表者名 藏野和彦
2．発表標題 Cox 環の可換環論
3．学会等名 第32回可換環論セミナー、 弘前大学（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 藏野和彦
2．発表標題 Rationality of negative curves and finite generation of symbolic Rees rings
3．学会等名 Singularities and related topics、 東京大学（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 K. Kurano
2．発表標題 Rationality of the negative curves and finite generation of symbolic Rees rings
3．学会等名 Commutative Algebra and its Environs（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Kurano's Home Page https://www.isc.meiji.ac.jp/~kurano/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関