

令和 5 年 6 月 7 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03227

研究課題名（和文）概Gorenstein環論の形成と発展

研究課題名（英文）Formation and development on the theory of almost Gorenstein rings

研究代表者

松岡 直之（Matsuoka, Naoyuki）

明治大学・理工学部・専任准教授

研究者番号：80440155

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：概Gorenstein環はCohen-Macaulay環とGorenstein環の間に横たわる溝を埋めるべく検討され始めた概念である。現在では概Gorenstein環を中心とした拡張が考察され、それらを統括した擬Gorenstein環論へと研究対象の裾野が広がっている。本研究課題では、主に1次元Cohen-Macaulay局所環、特に数値半群環を対象としながら、各種擬Gorenstein性解析に従事した。小行列式により定義される数値半群環の概Gorenstein性や2-概Gorenstein性が、数値半群の擬フロベニウス数の等差性により特徴づけられることを確かめるなどの成果を挙げている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非Gorenstein環の中でもGorensteinに近い構造とはいかなるものかを知ることが概Gorenstein環論の目的であるが、このことは、Cohen-Macaulay環を精密に分類するという大目標のみならず、Gorenstein性の持つ性質、例えばその美しい対称性が持つ意義をさらに明確にすることも期待され、可換環論のみならず代数幾何学、特異点論、表現論、組合せ論などの関連諸分野への波及効果も期待される。本研究は主に1次元の局所環を対象としているが、これらの理論の多くが1次元に帰着されることを考えると、当該研究分野の基盤構築に寄与したと判断する。

研究成果の概要（英文）：The concept of almost Gorenstein rings was first considered to fill the gap between Cohen-Macaulay rings and Gorenstein rings. Nowadays, the concept of 2-almost Gorenstein rings and other generalizations of almost Gorenstein rings are being introduced progressively. The scope of what should be called the pseudo-Gorenstein ring theory is expanding.

In this research project, we have been engaged in analyzing various pseudo-Gorenstein properties of one-dimensional Cohen-Macaulay local rings, especially numerical semigroup rings, which are the basis of pseudo-Gorenstein ring theories. We have found that the almost Gorenstein and 2-almost Gorenstein properties of numerical semigroup rings, which are defined by 2-minors of a certain matrix, can be characterized by the fact that pseudo-Frobenius numbers form an arithmetic sequence.

研究分野：可換環論

キーワード：Cohen-Macaulay環 Gorenstein環 almost Gorenstein環 数値半群環 擬フロベニウス数 極小自由分解 正準加群 stretched局所環

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の主題は可換環論である。可換環論は特異点解析の重要な方法の一つであって、20 世紀後半から 21 世紀にかけての 60 年間に、不変式論、代数的整数論、位相幾何学や代数幾何学、複素解析的多様体論、組合せ論などの他分野から問題と手法を獲得しつつ、Cohen-Macaulay 性解析を中心に、急速に開拓・整備された。代数系における基幹構造の一つであり、これら諸分野における共通言語の一つでもある。現代可換環論の研究領域は多岐に渡るが、本研究は、可換環論の中でも最重要の研究対象である Cohen-Macaulay 環に新たなクラスを提示し、Gorenstein 性からの距離を指標に階層化することを目標とした。

Cohen-Macaulay 性はホモロジー代数と非常に相性が良く、深い研究がなされ、多くの優れた成果が挙げられている。しかしながら、Cohen-Macaulay 性解析に従事すると、Gorenstein でない Cohen-Macaulay 環がなぜかくも大量に存在するのかという素朴な疑問に捕われる。鑑みるに、Gorenstein ではないが、Gorenstein 環に準ずる Cohen-Macaulay 環の新たなクラスの提示が求められていると判断する。可換環論の発展にとって、Cohen-Macaulay 環の新たなクラスが発見され、解明されることの意義は小さくない。この意味で、Cohen-Macaulay 局所環/次数環に対して後藤四郎・高橋亮・谷口直樹 [GTT] が提示した「almost Gorenstein 環」は、この要請に応え得る回答の一つであると、研究代表者は確信している。

[GTT] S. Goto, R. Takahashi, and N. Taniguchi, Almost Gorenstein rings – towards a theory of higher dimension -, J. Pure Appl. Algebra, 219 (2015), 2666—2712.

## 2. 研究の目的

非 Gorenstein であるが Gorenstein 環に次ぐ良い構造を持つ Cohen-Macaulay 環とはいかなるものであるべきか。このような視点からの先行研究は、[GMP]以前にはほとんどなく、そのような新たな Cohen-Macaulay 環のクラスの見つけと、それに基づく新分野の開拓は重要な課題のひとつである。発展性の高い Cohen-Macaulay 環の新たなクラスの見つけとその構造解析は、可換環論のみならず、代数幾何学や特異点論、組合せ論など、関連する処分野への応用と波及効果が期待される。この課題は今や日本発の独創的な研究である。代表者を中心に先駆的な成果を多数発信しており、非 Gorenstein な Cohen-Macaulay 環の構造解析に新たな展望を与えるものとなっている。

[GMP] S. Goto, N. Matsuoka, T. T. Phuong, Almost Gorenstein rings, J. Algebra, 379 (2013), 355—381.

## 3. 研究の方法

[GTT] では豊富な具体例と共に、Gorenstein 環ではない almost Gorenstein 環がもつ「G-正則性」と呼ばれる著しい性質が明らかにされている。2次元有理特異点は必ず almost Gorenstein 環であること、現在までに知られている有限 Cohen-Macaulay 表現型の Cohen-Macaulay 環はすべて almost Gorenstein 環であるなどといった重要な結果が示されているが、未開拓のまま残されている課題も多い。本研究はこれらの未開拓部分を含めた課題の中から下記 3 課題を選び、3 年間で成果を挙げることを目指すものである。

課題(1) イdealと加群の Rees 代数の almost Gorenstein 性解析

課題(2) Almost Gorenstein 環の拡張概念である様々な擬 Gorenstein 環(2-almost Gorenstein 環, generalized Gorenstein 環など)の基礎理論の開発

課題(3) (2)に関連し組み合わせ論に現れる各種の環の擬 Gorenstein 性解析

課題(2), (3)を常時視野に入れながら、特異点論との関わりの中、平成 30 年度は課題(1)に重点を置く。イdealの Rees 代数の構造解析の原点は 1979 年の後藤四郎-下田保博の共同研究である。多数の優れた研究者の努力によりその後、加群の場合を含めた Rees 代数の Cohen-Macaulay 性と Gorenstein 性の解析には大きな進展があったが、大量に存在する Cohen-Macaulay Rees 代数の中で Gorenstein 環となるものはかなり稀である。多数存在する非 Gorenstein Cohen-Macaulay Rees 代数の中には擬 Gorenstein Rees 代数であるものが実は豊富に含まれていて発見を待っているのではあるまいか。実際、巴系イdealやその冪、あるいは Ulrich 加群の syzygy 加群の Rees 代数の多くは almost Gorenstein 環であると予想されている。分担者 後藤四郎・Tran Thi Phuong と共に、谷口直樹と吉田健一の協力を得ながら、基礎環が必ずしも Cohen-Macaulay 環ではない場合も含めて、総力を挙げ解明に取り組む。すでに [GMTT, GMTY1-4]により

かなり多くの予備的成果が得られている。これら一連の成果を精査して完成させる。作業の中で必ず出会おうと予想される almost Gorenstein 環論の問題点(「弱点」と云うべきかもしれない)を掌握し、課題(2)の展開に備える。平成 31 年度以降の主課題は課題(2)、(3)である。Almost Gorenstein 環論を批判的に検討し、跳躍させることが目的である。研究代表者は Thai Nguyen 大学(ベトナム)大学院博士後期課程学生の研究指導を公式に担当している。彼らとの共同研究や後藤四郎-神代真也の研究を通して、これまでの almost Gorenstein 環論の枠組みでは解明が困難であったいくつかの課題(例えば、巴系イデアルの Rees 代数の almost Gorenstein 性判定条件)が、枠組みを拡張することによって乗り越えられ、はるかに明瞭になることが明らかとなって来た。後藤-神代により提示されている generalized Gorenstein 環とは、このような拡張概念の有望な候補の一つである。平成 31 年度には神代の協力を得ながら、分担者後藤・Phuong と共に、各種擬 Gorenstein 環の概念の確立と基礎理論の整備に従事する。課題(3)は谷口直樹・吉田健一の協力下に行われる。Almost Gorenstein 環、2-almost Gorenstein 環、または generalized Gorenstein 環であるような数値半群環の定義イデアルと自由分解の構造を記述することも計画している。このような関連分野における具体例の解析と応用を念頭に置くとき、Hibi 環、toric 環、商特異点や不変式環など、擬 Gorenstein 性との関連で魅力的かつ発展が期待される課題は非常に多く、成果を挙げたときのインパクトもまた大きいと判断される。

#### 4. 研究成果

2018 年度と 2019 年度の研究活動を通じて、課題(1)に関して一定の進展を得た。例えば、2 次元正則局所環の contracted ideal について、その order が 2 である場合の Rees 代数が概 Gorenstein であることを示すことに成功している。さらに、概 Gorenstein 環の拡張概念である 2-概 Gorenstein 環を提案し、概 Gorenstein 環論の発展の可能性を示すことに成功するなど、課題(2)に対する成果も挙げている。

1 次元局所環の解析の精度を高めるため、2019 年度以降は数値半群環やその一般化概念であるコア部分環を対象にし、その整閉イデアルの生成系の計算法の開発や Arf 性解析などに取り組んだ。コロナ禍により研究交流が制限される時期があったが、その中でも継続的に研究活動を行った経験は、後の課題(3)においても生かされており、2021 年と 2022 年には数値半群環の近 Gorenstein 性や stretched 性の解析にも取り組んでいる。特に、2 行  $n$  列の行列の 2 次小行列式によって定義される数値半群環を主に対象とし、このような特殊な状況下ではあるものの、近 Gorenstein 性と stretched 性の両方について明確な判定条件を得ることに成功した。また、数値半群環が 2 次小行列式で定義されるという条件は、数値半群に関連する特定の数値条件によって特徴づけられると予想されており、この予想の解明にも取り組み続けながら、2023 年度以降もこれらの研究を継続している。これらの経験を 2023 年度以降の研究活動に活かし、本研究課題の更なる深化と発展を目指す予定である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 E. Celikbas, O. Celikbas, C. Ciuperca, N. Endo, S. Goto, R. Isobe, N. Matsuoka	4. 巻 -
2. 論文標題 On the ubiquity of Arf rings	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Commutative Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 N. Endo, S. Goto, S.-i. Iai, N. Matsuoka	4. 巻 -
2. 論文標題 When are the rings $l:l$ Gorenstein?	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 arXiv:2111.13338	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 N. Endo, S. Goto, S.-i. Iai, N. Matsuoka	4. 巻 -
2. 論文標題 Ulrich ideals in the ring $k[[t^5, t^{11}]]$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 arXiv:2111.01085	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 N. Endo, S. Goto, S.-i. Iai, N. Matsuoka	4. 巻 -
2. 論文標題 On the weakly Arf $(S_2)$ -ifications of Noetherian rings	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 arXiv:2204.12132	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Van Kien Do, Matsuoka Naoyuki	4. 巻 40
2. 論文標題 Numerical Semigroup Rings of Maximal Embedding Dimension with Determinantal Defining Ideals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Springer INdAM Series	6. 最初と最後の頁 185 ~ 196
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-40822-0_12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Endo Naoki, Goto Shiro, Matsuoka Naoyuki, Yamamoto Yuki	4. 巻 148
2. 論文標題 Efficient generation of ideals in core subalgebras of the polynomial ring $k[t]$ over a field $k$	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3283 ~ 3292
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/15032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Celikbas Ela, Celikbas Olgur, Goto Shiro, Taniguchi Naoki	4. 巻 57
2. 論文標題 Generalized Gorenstein Arf rings	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Arkiv f?r Matematik	6. 最初と最後の頁 35 ~ 53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/ARKIV.2019.v57.n1.a3	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Celikbas Olgur, Goto Shiro, Takahashi Ryo, Taniguchi Naoki	4. 巻 62
2. 論文標題 On the Ideal Case of a Conjecture of Huneke and Wiegand	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 847 ~ 859
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0013091518000731	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 GOTO Shiro, KUMASHIRO Shinya, LOAN Nguyen Thi Hong	4. 巻 71
2. 論文標題 Residually faithful modules and the Cohen-Macaulay type of idealizations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1269 ~ 1291
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/80398039	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Goto Shiro, Matsuoka Naoyuki, Taniguchi Naoki, Yoshida Ken-ichi	4. 巻 59
2. 論文標題 On the almost Gorenstein property in the Rees algebras of contracted ideals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 769 ~ 785
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2018-0001	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Goto Shiro, Isobe Ryotaro, Kumashiro Shinya	4. 巻 224
2. 論文標題 Correspondence between trace ideals and birational extensions with application to the analysis of the Gorenstein property of rings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 747 ~ 767
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2019.06.008	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chau Tran Do Minh, Goto Shiro, Kumashiro Shinya, Matsuoka Naoyuki	4. 巻 521
2. 論文標題 Sally modules of canonical ideals in dimension one and 2-AGL rings	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 299 ~ 330
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2018.11.023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Goto Shiro, Kien Do Van, Matsuoka Naoyuki, Le Truong Hoang	4. 巻 508
2. 論文標題 Pseudo-Frobenius numbers versus defining ideals in numerical semigroup rings	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 1~15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2018.04.025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Goto Shiro, Matsuoka Naoyuki, Taniguchi Naoki, Yoshida Ken-ichi	4. 巻 67
2. 論文標題 Almost Gorenstein Rees Algebras of $\mathfrak{p}_g$ -Ideals, Good Ideals, and Powers of the Maximal Ideals	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 The Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 159~174
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1307/mmj/1516330972	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計5件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 松岡直之
2. 発表標題 Ulrich ideals in numerical semigroup rings
3. 学会等名 東京可換環論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松岡直之
2. 発表標題 Efficient generation of ideals in core subalgebras of the polynomial ring $k[t]$ over a field $k$
3. 学会等名 The Eighth China - Japan - Korea International Symposium on Ring Theory (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 後藤 四郎
2. 発表標題 Efficient generation of ideals in core subalgebras of the polynomial ring $k[t]$
3. 学会等名 第32回可換環論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoyuki Matsuoka
2. 発表標題 The generalized Gorenstein property and numerical semigroup rings obtained by gluing
3. 学会等名 INdAM meeting : international meeting on numerical semigroups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naoyuki Matsuoka
2. 発表標題 The GGL property of numerical semigroup rings obtained by gluing
3. 学会等名 The 10th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	後藤 四郎	明治大学・研究・知財戦略機構(生田)・研究推進員(客員 研究員)	
	(Goto Shiro)		
	(50060091)	(32682)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	チャン ティフン  (Tran Thi Phuong)  (00649824)	明治大学・研究・知財戦略機構（生田）・研究推進員（客員 研究員）    (32682)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関