

令和 4 年 4 月 11 日現在

機関番号：11301
研究種目：基盤研究(C) (一般)
研究期間：2018～2021
課題番号：18K03232
研究課題名(和文)モチーフとモジュラス

研究課題名(英文) Motives and modulus

研究代表者

山崎 隆雄 (Yamazaki, Takao)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：00312794

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：モジュラス付きモチーフの三角圏を構成した。これは10年以上前から本研究の中心課題と位置付けられていたものであるが、それが三本の論文として受理または出版された。第一論文は一般モジュラス対とその上の層の基礎理論、第二論文は固有モジュラス対の上の層の理論、第三論文はそれらを用いたモチーフの圏の構成にあてられている。関連する話題として、モジュラス付きモチーフと相互層の関係、相互層のテンソル積、モジュラス付き混合Hodge構造、 $P1$ 不変移送付き層、モジュラー曲線の1-モチーフの数論について研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

モジュラス付きモチーフの三角圏は10年以上前からその存在が期待されていたものである。その基盤となる論文が出版されたことは、この分野の研究を推進を促進すると期待される。実際、関連分野で新たな方向の研究を開始した数学者が国内外で(特に若い世代に)現れている。また、Hodge理論における対応物、テンソル積、 $P1$ 不変層、モジュラー曲線など、関連する話題への応用も与えることができたため、その意義が多くの研究者に伝えられることができると期待している。

研究成果の概要(英文)：A category of motives with modulus is constructed. This has been considered as a fundamental goal in this research subject for a decade. The results are published or accepted as a series of three papers. The first is devoted to the theory of modulus pairs and sheaves on them, the second to the sheaf theory on proper modulus pairs, and the third to the construction of the triangulated category of motives with modulus. We have also studied related subjects such as reciprocity sheaves and their tensor product, mixed Hodge structure with modulus, $P1$ -invariant sheaves with transfers, and arithmetic of 1-motives of modular curves.

研究分野：代数学

キーワード：代数学 数論幾何 代数幾何学 整数論

1. 研究開始当初の背景

- (1) 1990年代に Voevodsky により構成された混合モチーフの三角圏は、ホモトピー不変性という強い性質が大前提とされている。そのために加法的可換代数群・微分形式・de Rham-Witt 微分形式・相対ピカル群・代数曲線の一般ヤコビ多様体・加法的高次 Chow 群・モジュラス付き高次 Chow 群・特異多様体の Levin-Weibel Chow 群のように、重要な対象でありながら Voevodsky の理論では扱えない研究対象は多く見られる。そこで、ホモトピー不変でないモチーフの理論が望まれていた。
- (2) 2010年代前半より、このような理論を構築する指針としてホモトピー不変性の代わりに Weil 相互律を用いるという方針が提案されてきた。この方針は Bruno Kahn 氏および斎藤秀司氏との共同研究で、相互層の理論として定式化された。しかし、単にホモトピー不変(移送付き)層を相互層に置き換えるだけでは望みのモチーフ圏は得られないことが徐々に明らかになって来た。そこにはもう一つ欠けたピースが残されていた。
- (3) このピースはモジュラス対の理論である。これは Voevodsky により用いられた有限対応の圏を拡張したもので、相互層の理論でも(不完全な形で)補助的に用いられていた。理論の基礎をも有限対応の圏からモジュラス対の圏へと拡張することが、本研究の枠組みを大幅に拡張するものとなった。このアイデアは Bruno Kahn 氏・斎藤秀司氏と共同で探求され、2015年ごろまでにだいたいの形が整えられ、「モジュラス付きモチーフ」という研究の方向性が確立した。
- (4) 同様の現象は、Hodge 理論でも追及されていた。Deligne による混合 Hodge 理論は古典であるが、Bloch と Srinivas は 2000年の論文でこの理論には拡張の余地があることを指摘し、enriched Hodge 構造の理論を展開した。これはのちに Barbieri-Viale, Mazzari, 加藤和也, Russell などによりさらなる発展が試みられてきたが、部分的な結果にとどまっていた。モジュラス付きモチーフの観点からは、これはホモトピー不変ではないモチーフの Hodge 実現として現れるべきものである。また、次元の場合は Laumon 1-モチーフにより記述されることが期待される。
- (5) Milnor-K 群に関する Bloch-加藤予想に見られるように、モチーフの圏におけるテンソル積は非常に深い現象に直結している。この点について 1990年代に染川や Raskind-Spiess により先駆的な研究がなされてより、その後も Jinghyun Park, Kay Ruelling, Florian Ivorra など多くの研究者によって多様な研究がなされてきた。この問題を相互層やモジュラス対という観点から再検討することが期待される。

2. 研究の目的

- (1) Voevodsky によるモチーフの三角圏を、前項(3)の方針に沿って拡張することにより、モジュラス付きモチーフの三角圏を構築することが中心的な目標であった。前述の通り、それは過年度の研究で方向性が固まっていたが、モジュラス対の Grothendieck 位相と層の理論に大きい欠損があることを Joseph Ayoub 氏により指摘された。まずはこの欠損を修復することが大きな課題となる。
- (2) Voevodsky のモチーフ理論にモジュラス付きの一般化が存在すれば、その実現として混合 Hodge 構造の理論にも対応する一般化があるはずである。これには enriched Hodge 構造をさらに一般化することが必要となる。また、次元の場合には Laumon 1-モチーフを用いて具体的に記述されることも望まれる。
- (3) モジュラス対やモジュラス付きモチーフのテンソル積の構造を明らかにしたい。染川, Raskind-Spiess, Jinghyun Park, Kay Ruelling, Florian Ivorra など多くの研究者による一連の研究を、この観点から再検討することで整理しなおすとともに、まだ全貌が不明であった場合(二つの加法群のテンソル積)に新たな知見をもたらしたい。
- (4) 前項(2)で触れたように、曲線のモジュラス付きモチーフは 1-モチーフを用いて具体的に記述されることが期待される。その基本的なケースは一般ヤコビ多様体としてとらえられる。特にモジュラー曲線といゆ数論的観点か重要なケースを取り上げることで、一般ヤコビ多様体の数論という、これまでほとんど手つかずであった研究領域を探求したい。

3. 研究の方法

上記した目的のうち, (1)は Bruno Kahn 氏・斎藤秀司氏・宮崎弘安氏との共同研究を行う. (2)は Florian Ivorra 氏と, (3)は Kay Ruelling 氏・杉山倫氏と, (4)は Yifan Yang 氏, Fu-Tsun Wei 氏共同研究を行う. この多くは先行課題において関連する研究を行ったことのあるメンバーであるが, 宮崎氏と杉山氏は今回が初めての共同研究となった. また, 次項(6)で述べる関連する話題について, 東北大の同僚である甲斐巨氏および東北大出身の小田部秀介氏と共同する機会にも恵まれた.

4. 研究成果

- (1) モジュラス付きモチーフの三角圏を構成した. これは 10 年以上前から本研究の中心課題と位置付けられていたものであるが, それが三本の論文として受理または出版された. 第一論文は一般モジュラス対とその上の層の基礎理論, 第二論文は固有モジュラス対の層の理論, 第三論文はそれらを用いたモチーフの圏の構成にあてられている. 以上は Bruno Kahn 氏, 斎藤秀司氏, 宮崎弘安氏との共同研究である.
- (2) モジュラス付きモチーフは Voevodsky のモチーフの拡張であるが, 後者はホモトピー不変移送付き層を用いて構成される. 我々は以前の研究でホモトピー不変移送付き層を拡張した相互層の理論を展開していた. Bruno Kahn 氏, 斎藤秀司氏との共同研究では相互層とモジュラス付きモチーフの関係を明らかにし, 論文として出版された.
- (3) 相互層のテンソル積について, Kay Ruelling 氏, 杉山倫氏と共同研究を行った. これは 1990 年代に染川や Raskind-Spiess の先駆的な研究がなされてより, 多くの研究者によって多様な研究がなされてきた. 我々は相互層という新たな観点からこの問題を再検討し, 多くの古い結果を復元できることを確認するとともに, 二つの加法群のテンソル積について新しい現象を発見した.
- (4) Florian Ivorra 氏と共同で, モジュラス付き曲線の Nori モチーフと Laumon 1-モチーフについて研究した. 最近の Ayoub と Barbier-Viale の研究では, アフィン曲線と被約な因子の組から生じる Nori モチーフが Deligne 1-モチーフの圏と同値になることが証明していた. この拡張として, 被約とは限らないモジュラス付き曲線から生じる Nori モチーフを構成し, 基礎体が代数体の場合はそれが Laumon 1-モチーフと同値になることを証明した.
- (5) 前項の一般化として, モジュラス付き混合 Hodge 構造の理論を構築した. モジュラス付き混合 Hodge 構造とは, Deligne の混合 Hodge 構造の拡張であり, Bloch-Srinivas の enriched 混合 Hodge 構造や Barbieri-Viale の形式 Hodge 構造のさらなる一般化ともみなせる. 重さが低い場合は Laumon 1-モチーフにより具体的に記述することが可能である. 高次元の非特異完備多様体と二つの因子の組に対してその相対コホモロジーにモジュラス付き混合 Hodge 構造を (関手的に) 入れられることを証明した. また, この対象に対するポアンカレ双対性も証明した. さらに, この構成を応用することで, 加藤・Russell による「モジュラス付き Albanese 多様体」を「モジュラス付き Albanese 1-モチーフ」に拡張することができた. これも Florian Ivorra 氏との共同である.
- (6) 以上の話題に密接な関係にある P_1 不変移送付き層について研究した. ホモトピー不変移送付き層の拡張として相互層があることを上で述べたが, さらなる一般化として P_1 不変移送付き層が考えられる. これは相互層に比べ条件が緩すぎてモチーフ圏の構成といった目的にはそぐわないが, Brauer 群や対数的 Hodge-Witt コホモロジーのようにホモトピー不変ではないが P_1 不変な不変量を計算する上では有用である. この観点から小田部氏の結果を見直すことで, 小田部氏や Binda-Ruelling-斎藤の結果を拡張することに成功した.
- (7) モジュラー曲線のヤコビ多様体の有理点のねじれ部分は, 数論における重要な研究対象として Mazur をはじめとする多くの人により研究されてきた. 同様な問題を, カスプをモジュラスとする一般ヤコビ多様体に対して考えることができる. Yifan Yang 氏との共同研究で, レベルが素数の冪の場合にこの問題に満足のいく解答を得ることができた. この結果は論文 (2)として出版された. さらに Fu-Tsun Wei 氏との共同研究で, レベルが平方因子を持たない場合に同様の結果を得た. さらに, 正標数関数体上で Drinfeld モジュラー曲線に対する類似も得ることができた.

- (8) 前項に深く関係した話題として、モジュラー曲線の不分岐アーベル被覆を決定するという問題も、Mazur をはじめとする多くの人により研究されてきた。同様な問題を、カスプの外で不分岐なアーベル被覆について考えることができる。(これは一般ヤコビ多様体の双対 1-モチーフの有理ねじれ部分を計算することに相当する。) Yifan Yanf 氏との共同研究で、レベルが素数の場合にこの問題について完全な解答を得ることができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 8件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ivorra Florian, Yamazaki Takao	4. 巻 21
2. 論文標題 MIXED HODGE STRUCTURES WITH MODULUS	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu	6. 最初と最後の頁 161 ~ 195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S1474748020000043	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yamazaki Takao, Yang Yifan	4. 巻 162
2. 論文標題 Maximal abelian extension of $\mathbb{Q}(p)$ unramified outside cusps	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 441 ~ 455
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00229-019-01136-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kahn Bruno, Miyazaki Hiroyasu, Saito Shuji, Yamazaki Takao	4. 巻 Volume 5
2. 論文標題 Motives with modulus, I: Modulus sheaves with transfers for non-proper modulus pairs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Epijournal de Geometrie Algebrique	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.46298/epiga.2021.volume5.5979	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kahn Bruno, Miyazaki Hiroyasu, Saito Shuji, Yamazaki Takao	4. 巻 Volume 5
2. 論文標題 Motives with modulus, II: Modulus sheaves with transfers for proper modulus pairs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Epijournal de Geometrie Algebrique	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.46298/epiga.2021.volume5.5980	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Wei Fu-Tsun, Yamazaki Takao	4. 巻 31
2. 論文標題 Rational torsion of generalized Jacobians of modular and Drinfeld modular curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Forum Mathematicum	6. 最初と最後の頁 647 ~ 659
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/forum-2018-0141	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Florian Ivorra and Takao Yamazaki	4. 巻 70
2. 論文標題 Nori motives of curves with modulus and Laumon 1-motives	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Canadian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 868 - -897
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/CJM-2017-037-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kahn Bruno, Saito Shuji, Yamazaki Takao	4. 巻 24
2. 論文標題 Reciprocity sheaves, II	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Homology, Homotopy and Applications	6. 最初と最後の頁 71 ~ 91
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/HHA.2022.v24.n1.a4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kai Wataru, Otabe Shusuke, Yamazaki Takao	4. 巻 10
2. 論文標題 Unramified logarithmic Hodge-Witt cohomology and -invariance	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Sigma	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fms.2022.6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Rueelling Kay, Sugiyama Rin, Yamazaki Takao	4. 巻 300
2. 論文標題 Tensor structures in the theory of modulus presheaves with transfers	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 929 ~ 977
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-021-02819-2	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Takao Yamazaki
2. 発表標題 Arithmetic of generalized Jacobians of modular curves
3. 学会等名 Eisenstein ideal and Iwasawa theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takao Yamazaki
2. 発表標題 Arithmetic of generalized Jacobians of modular curves
3. 学会等名 HKU Number Theory Days 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takao Yamazaki
2. 発表標題 Lax tensor products for reciprocity sheaves
3. 学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takao Yamazaki
2. 発表標題 Mixed Hodge structures with modulus
3. 学会等名 Pan Asia Number Theory Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takao Yamazaki
2. 発表標題 Mixed Hodge structures with modulus and 1-motives
3. 学会等名 Hodge theory and algebraic geometry (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takao Yamazaki
2. 発表標題 Generalized Jacobians of modular and Drinfeld modular curves
3. 学会等名 Japan-Taiwan Joint conference on Number theory 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takao Yamazaki
2. 発表標題 Motives and mixed Hodge structures with modulus
3. 学会等名 日本数学会代数学分科会特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takao Yamazaki
2. 発表標題 Arithmetic of generalized Jacobians of modular curves.
3. 学会等名 Asia-Australia Algebra Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takao Yamazaki
2. 発表標題 Abelian covering of modular curves and non-congruence subgroups
3. 学会等名 整数論サマースクール (招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 山崎 隆雄	4. 発行年 2022年
2. 出版社 岩波書店	5. 総ページ数 334
3. 書名 モチーフ理論	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関

その他の国・地域	国立台湾大学			
フランス	Universite de Rennes 1			
ドイツ	Bergische Universitat Wuppertal			