

令和 5 年 10 月 25 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03233

研究課題名（和文）多重ゼータ値の $q$ 類似およびその特殊化の代数解析的研究研究課題名（英文）Algebraic analysis of a  $q$ -analogue of multiple zeta values and its specialization

研究代表者

竹山 美宏（Takeyama, Yoshihiro）

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：60375392

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：数学的对象の $q$ 類似とは、その対象の1パラメータ変形であって、パラメータ $q$ を1にする極限においてもその対象を復元するものをいう。本研究では、自然数の逆数のべき乗の多重和である多重ゼータ値の $q$ 類似と、パラメータ $q$ を適当な意味で1のべき根に特殊化した有限多重和の性質を調べ、Kaneko-Zagier 予想と呼ばれる数論的な予想との関係を明らかにした。また、多重ゼータ値の一般化である多重 $L$ 値について、良い代数的構造をもつ新たな1パラメータ変形を構成した。さらに、多重 $T$ 値と呼ばれる数論的類似物の和の母関数の表示式を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Kaneko-Zagier 予想は、素数位数の有限体の元の列である有限多重ゼータ値と、実数である対称多重ゼータ値の間に一対一対応が存在することを主張する。本研究で扱った1のべき根における有限多重和は、この二つの対象をそれぞれ代数的および解析的な極限操作によって復元する。本研究で得られた成果は、この枠組みを用いて Kaneko-Zagier 予想を検証するものであり、同予想の解決に向けた新たな視点を提供していると思われる。また、多重ゼータ値の類似物の性質を、特殊関数を用いる初等的な手法によって調べることに成功しており、さまざまな方向への拡張および一般化が期待できる。

研究成果の概要（英文）：A  $q$ -analogue of a mathematical object is a one-parameter deformation that restores the original object in the limit as the parameter goes to 1. In this study, we investigated a  $q$ -analogue of multiple zeta value, which is a multiple sum of negative power of positive integers, and properties of finite multiple sums obtained by specializing the parameter to a root of unity in an appropriate sense. As a result, we clarified the relationship between the finite multiple sums and the Kaneko-Zagier conjecture. We also constructed a new one-parameter deformation of multiple  $L$ -value, which is a generalization of the multiple zeta value, with a good algebraic structure. Furthermore, we obtained an expression of the generating function of a variant of the multiple zeta value called multiple  $T$ -value.

研究分野：特殊関数論

キーワード：多重ゼータ値  $q$ 類似

## 1. 研究開始当初の背景

研究課題が含む二つのキーワード「多重ゼータ値」と「q 類似」を中心に背景を述べる。まず、多重ゼータ値とは次で定義される多重和である。

$$\sum_{m_1 > \dots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

ここで  $k_1, \dots, k_r$  は正の整数で  $k_1 \geq 2$  である(以下、これらの組  $(k_1, \dots, k_r)$  をインデックスと呼ぶ)。多重ゼータ値の研究はオイラーの時代まで遡るが、1990 年代後半から数理論理学や結び目理論、現代的な数論と関係することが明らかとなり、世界中で活発な研究が行われている。

近年では多重ゼータ値の数論的な類似物の研究も進められている。そのなかで、本研究では Kaneko-Zagier による予想に着目する。上の多重和で、 $m_1, \dots, m_r$  の動く範囲を素数  $p$  未満に制限したものを有限体  $F_p$  の元と見なし、これをすべての素数について並べた列について、有限項を除いて等しいものを同一視して定まる対象を有限多重ゼータ値と呼ぶ。一方で、上の多重和で  $k_1 = 1$  とした発散級数に、ある正規化を行って得られる値から、対称多重ゼータ値と呼ばれる実数値が定まる。Kaneko-Zagier 予想は、しかるべき定式化の下で有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値の間に一対一対応が存在することを主張する。これは代数的な対象と解析的な対象を関係づける興味深い予想である。

次に q 類似について述べる。量子力学における可解モデルの解析においては、特殊関数の 1 パラメータ変形が現れる。このときの変形パラメータ  $q$  を 1 に近づける極限が古典力学への極限に対応する。このような背景から、 $q$  を 1 に近づける極限で元の対象を復元する良い変形を「q 類似」と呼ぶ。

多重ゼータ値については、その q 類似がいくつか提案され、広く研究されている。そのなかでも、Kaneko-Kurokawa-Wakayama が定義した Riemann のゼータ関数の q 類似を自然に多重化したものについては、多重ゼータ値が満たす有理数係数の線形関係式の多くが、ほぼ同じ形のまま成り立つことが知られている。

## 2. 研究の目的

本研究は、多重ゼータ値とその拡張の q 類似、およびその 1 のべき根への特殊化について、代数的構造・数論的性質を調べることを目的とする。

前項で述べた多重ゼータ値の q 類似のパラメータ  $q$  については、多重和の収束のため  $|q| < 1$  であることを仮定しなければならない。しかし、正の整数  $n$  をひとつ取り、多重和の足し上げる範囲を  $n$  未満に打ち切った有限和を考えると、 $q$  を 1 の原始  $n$  乗根に特殊化できる。この特殊化で得られる有限多重調和 q 級数は、一般には円分体  $Q(\zeta_n)$  の元であるが、 $n$  が素数  $p$  のときは整数環  $Z[\zeta_p]$  に属する。この有限多重調和 q 級数について、研究代表者と Henrik Bachmann 氏、田坂浩二氏との共同研究により、次のことがわかっている。第一に、各素数  $p$  について、 $(1 - \zeta_p)$  で生成されるイデアルを法とすると有限体  $F_p$  の元が定まる。この元をすべての素数  $p$  について考え、それらを並べた列をつくると、前項で述べた有限多重ゼータ値と一致する。第二に、原始  $n$  乗根として  $\exp(2\pi i/n)$  を取り、 $n$  を無限大にする極限をとる。この極限値は複素数であるが、その実部には対称多重ゼータ値が現れる。

以上のように、多重ゼータ値の q 類似から、Kaneko-Zagier 予想の二つの対象が同時に得られる。したがって、q 類似は単なる技巧的な拡張ではなく、数論の問題への新しい視点を提供する対象だと言えるだろう。そこで本研究では、多重ゼータ値およびその数論的類似物について、q 類似や対応する有限多重調和 q 級数を対象として、その代数的構造および数論的性質を考察する。

## 3. 研究の方法

まず、代数的構造については、多重ゼータ値の q 類似がもつ積構造を詳しく調べ、その応用として関係式が導出できるかどうかを考察する。多重ゼータ値が有理数体上で張るベクトル空間は実数の積について閉じる。多重ゼータ値は上記の多重和としての表示のほかに、反復積分による表示をもつが、これら二つの表示に応じて積が二通りに計算できる。その結果を比較すると多重ゼータ値の線形関係式が得られる。有限 / 対称多重ゼータ値は、多重ゼータ値と同様に二つの積構造をもち、その性質は Kaneko-Zagier によって解明されている。以上の結果を q 類似に拡張することを最初の目標とし、その応用として 1 のべき根における有限多重調和 q 級数の関係式の導出を試みる。

次に、数論的性質については、多重ゼータ値のさまざまな類似物の  $q$  類似および対応する有限多重調和  $q$  級数を構成し、特殊関数論的な手法を用いてその性質を調べる。多重ゼータ値の類似物としては、シューア対称関数を使うもの、ルート系上の多重和に置き換えたものなどが知られている。これらの良い  $q$  類似を考え、さらに適切な意味で  $q$  を 1 のべき根に特殊化した有限多重調和  $q$  級数を構成する。また、多重ゼータ値については、その楕円類似が Enriquez らにより既に定義されている。本研究では特殊関数論の観点から、多重ゼータ値の楕円類似やそのスケール極限にあたる「 $q$  の絶対値が 1 の場合の  $q$  類似」を構成したい。以上のように構成された対象が満たす関係式を、母関数の計算など特殊関数論的な手法を用いて考察する。

#### 4. 研究成果

(1) 有限多重調和  $q$  級数の特殊値の計算、および大野-Zagier 型関係式の証明 (田坂浩二氏, Henrik Bachmann 氏との共同研究)

有限多重調和  $q$  級数は、インデックスを定めるごとに定まる。同じ値だけからなるインデックスをもつ 1 のべき根における有限多重調和  $q$  級数を、母関数を使っていくつかの場合に計算し、それが二項係数の和として表されることを示した。さらに、同じ重さ・深さ・高さをもつインデックスに関する有限多重調和  $q$  級数の和の母関数を計算し、Ohno-Zagier 型の関係式を得た。

(2) 多重ゼータ値の  $q$  類似が満たす微分関係式の代数的な証明、およびその応用として有限多重調和  $q$  級数が満たす大野型関係式の証明

以前の研究で、多重ゼータ値の  $q$  類似を含むあるクラスの無限級数のなす空間において、多重ゼータ値の二つの積構造の  $q$  類似が定義されることを示した。本研究では、この空間に非自明な微分構造を導入し、多重ゼータ値の微分関係式の  $q$  類似を証明した。さらに、この微分構造を利用して、1 のべき根における有限多重調和  $q$  級数の大野型関係式を証明した。

(3) Mordell-Tornheim 型の 1 のべき根における有限多重調和  $q$  級数の研究 (田坂浩二氏, Henrik Bachmann 氏との共同研究)

前節で述べたように、1 のべき根における有限多重調和  $q$  級数について、 $q$  を 1 にする極限に対応する代数的もしくは解析的操作を行うことで、それぞれ有限多重ゼータ値もしくは対称多重ゼータ値が得られる。本研究では、Mordell-Tornheim 型と呼ばれる多重ゼータ値の類似物についても、同様の性質をもつ有限多重調和  $q$  級数を構成し、それが Kaneko-Zagier 予想の対応と整合的であることを示した。

(4) 多重  $L$  値の 1 パラメータ変形の構成とその積構造の研究 (加藤正輝氏との共同研究)

共同研究者の加藤氏は以前の研究で、多重ゼータ値の 2 パラメータ変形を定義し、それが多重ゼータ値と同様の積構造をもつこと、および、その積構造がテータ関数の Fay の関係式から導出されることを示した。我々は、この 2 パラメータ変形のスケール極限にあたる対象を、多重積分を使って構成した。ここで得られた対象は変形パラメータを一つ持ち、それを 0 にする極限で Arakawa-Kaneko によって導入された多重  $L$  値に移行する。また、我々が構成した対象は二重余接関数のある種の一般化と見なすこともでき、その特殊値は変形パラメータの数論的性質を反映した特徴をもつことが期待される。

(5) 有限多重調和  $q$  級数と Kaneko-Zagier 予想の精密化に関する研究 (田坂浩二氏との共同研究)

最近、有限多重ゼータ値および対称多重ゼータ値のある一般化が定義され、これらの間にも一対一対応があると予想されている (Kaneko-Zagier 予想の精密化)。本研究では、この一般化した有限 / 多重ゼータ値が、有限多重調和  $q$  級数からそれぞれ代数的 / 解析的手法によって得られることを証明した。さらに、この発見をもとに、反転公式、双対性、巡回和公式と呼ばれる既知の関係式の別証明も与えた。有限多重調和  $q$  級数に対してこれらの関係式を証明することにより、一般化有限 / 対称多重ゼータ値の関係式を同時に得られるのが、我々の方法の利点である。

(6) 多重  $T$  値の和の母関数に関する研究

多重ゼータ値の Ohno-Zagier の関係式は、多重ゼータ値の和の母関数を、Riemann のゼータ関数の値で表すものである。Ohno-Zagier の関係式は、1 変数の多重ポリログ関数の母関数が満たす微分方程式を、ガウスの超幾何関数を使って解くことにより得られる。標記の多重  $T$  値とは、多重ゼータ値の和の変数  $m_1, \dots, m_r$  の偶奇を指定することで定まる部分和で、Kaneko-Tsumura によって導入された。この多重  $T$  値に対して、Ohno-Zagier 関係式の導出と同様の考察を行い、多重  $T$  値の和の母関数の表示式を得た。この表示式は、Heun 型の微分方程式を、ある特別な場合に超幾何関数を使って解くことで得られる。以上の結果を  $q$  類似の場合に拡張することは今後の課題である。

(7) 有理数体上の有限次ガロア拡大において完全分解する素数の新たな特徴づけ (Julian Rosen

氏，田坂浩二氏，山本修司氏との共同研究)

$L$  を有理数体上の有限次ガロア拡大とし， $C$  をそのガロア群の共役類とする。このとき，素数からなるある有限集合  $S$  と，有理数係数の斉次線形漸化式を満たす有理数列であって，以下の条件を満たすものの構成法を与えた。 $S$  に属さない任意の素数  $p$  について，数列の  $p$  番目の項は  $p$  を法として  $0$  か  $1$  であり， $1$  となることは  $p$  におけるフロベニウス同型が  $C$  に属することと同値である。特に， $C$  として単位元のみからなる共役類を取れば， $p$  番目の項が  $p$  を法として  $1$  に等しいことと， $p$  が  $L$  において完全分解することが同値となる。

以上の結果は Rosen 氏により導入された「代数的数の有限類似」の枠組みを用いることにより得られる。各素数  $p$  について位数  $p$  の有限体を考え，すべての素数を走らせて直積を取る。この直積を，すべての素数を走らせた直和で割って得られる環を考える(有限多重ゼータ値はこの環の元として定義される)。代数的数の有限類似は，この環の元であって，有理数係数の斉次線形漸化式を満たす有理数列の素数番目の項を並べて得られるものである。Rosen 氏は，このような元をガロア理論的にも特徴づけており，これら二つの特徴づけの関係を具体的に記述することによって，上記の結果が得られる。我々の構成法は非可換なガロア拡大にも適用可能であるという点において興味深いと思われる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yoshihiro Takeyama	4. 巻 B91
2. 論文標題 A $q$ -analogue of multiple zeta values and its application to number theory	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 69-86
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yoshihiro Takeyama, Koji Tasaka	4. 巻 77
2. 論文標題 Supercongruences of multiple harmonic sums and generalized finite/symmetric multiple zeta values	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 75-120
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.77.75	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kato Masaki, Takeyama Yoshihiro	4. 巻 57
2. 論文標題 A deformation of multiple L-values	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 93--118
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11139-021-00441-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 BACHMANN Henrik, TAKEYAMA Yoshihiro, TASAKA Koji	4. 巻 -
2. 論文標題 Finite and symmetric Mordell-Tornheim multiple zeta values	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/84348434	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 TAKEYAMA Yoshihiro	4. 巻 -
2. 論文標題 On a weighted sum of multiple T-values of fixed weight and depth	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Bulletin of the Australian Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1~8
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0004972721000125	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Bachmann Henrikl, Takeyama Yoshihiro, Tasaka Koji	4. 巻 32
2. 論文標題 Special values of finite multiple harmonic q-series at roots of unity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 ALGEBRAIC COMBINATORICS, RESURGENCE, MOULDS AND APPLICATIONS (CARMA) Vol. 2, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics	6. 最初と最後の頁 1~18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/205-1/1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeyama Yoshihiro	4. 巻 52
2. 論文標題 Derivations on the algebra of multiple harmonic q-series and their applications	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 41~65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-019-00139-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Henrik Bachmann, Yoshihiro Takeyama, Koji Tasaka	4. 巻 154 (12)
2. 論文標題 Cyclotomic analogues of finite multiple zeta values	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Compositio Mathematica	6. 最初と最後の頁 2701--2721
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/S0010437X18007583	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 竹山美宏
2. 発表標題 多重ゼータ値の $q$ 類似とその数論への応用
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）「可積分系数理の諸相」（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 TAKEYAMA Yoshihiro
2. 発表標題 $Q^{\wedge}$ -multiple zeta value
3. 学会等名 第15回多重ゼータ研究集会 & 第53回関西多重ゼータ研究会(共同開催)（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takeyama Yoshihiro
2. 発表標題 Finite multiple harmonic $q$ -series at a root of unity and Kaneko-Zagier conjecture
3. 学会等名 Japan-Taiwan joint workshop on multiple zeta values（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 竹山美宏
2. 発表標題 多重L値のある変形について
3. 学会等名 第2回 多重三角関数とその一般化（招待講演）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	田坂 浩二  (Tasaka Koji)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------