

令和 5 年 5 月 30 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03234

研究課題名(和文)モチーフのL関数とレギュレーターの特異関数論的研究

研究課題名(英文) Study of L-functions and regulators of motives via special functions

研究代表者

大坪 紀之(Otsubo, Noriyuki)

千葉大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：60332566

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：超幾何ファイブレーションの周期およびレギュレーターを超幾何関数を用いて記述した(朝倉政典氏との共同研究)。その応用として、超幾何関数およびその特殊値を、代数関数や代数的数のlogを用いて表示する公式を与えた(朝倉政典氏、寺嶋友秀氏との共同研究)。虚数乗法をもつモチーフの周期に関するGross-Deligne予想のl進類似およびp進類似を定式化し、アーベル型のモチーフに対して証明した(Bruno Kahn氏との共同研究)。古典的な超幾何関数のさまざまな変換公式を証明する統一的方法を発見した。有限体上の(多変数の場合を含む)一般超幾何関数の定義を与え、様々な基本性質を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

超幾何関数は数学のさまざまな分野や物理学で現れる非常に重要な対象である。超幾何関数は数論においても重要であり、数論的なL関数(リーマン・ゼータ関数の一般化)との関係からも注目されている。L関数の特殊値は現代の数論における最も重要な研究対象の一つであり、周期やレギュレーターという幾何学的な不変量との関係が予想されている。本研究では、モチーフの周期やレギュレーターと超幾何関数との関係について多角的に調べた。特に、周期、レギュレーター、超幾何関数たちの数論的(l進的、p進的、モチーフ的)な類似物について基礎的な研究を行った。古典的な超幾何関数論に新たな視点を与えるということも期待できる。

研究成果の概要(英文)：We described the periods and regulators of hypergeometric fibrations in terms of hypergeometric functions (joint work with M. Asakura). As an application, we gave formulas expressing hypergeometric functions and their special values in terms of the logarithm of algebraic functions and algebraic numbers (joint work with M. Asakura and T. Terasoma). We formulated l-adic and p-adic analogues of the Gross-Deligne conjecture on the periods of motives with complex multiplication, and proved them for motives of abelian type (joint work with B. Kahn). We discovered a method to prove in a uniform manner the various transformation formulas for classical hypergeometric functions. We gave a definition of generalized hypergeometric functions (including those with many variables) over finite fields, and established various fundamental properties.

研究分野：数論

キーワード：L関数 モチーフ 超幾何関数 周期 レギュレーター

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

モチーフの  $L$  関数は数論における中心的な対象であり、その特殊値に関して Beilinson-Bloch-加藤予想などの重要な予想がある。それらの予想では、 $L$  関数の特殊値が周期やレギュレーターという幾何学的な不変量を用いて記述される。近年の研究で、 $L$  関数の特殊値や上記の不変量が一般化された超幾何関数を用いて記述される場合が知られており、超幾何関数論の数論への応用が期待されていた。

超幾何関数は数学のあらゆる分野や物理学において重要な特殊関数の族である。その研究の歴史は極めて長いが、いまだに分かっていない事も多い。また、超幾何関数のさまざまな一般化や類似物についても活発に研究が行われている。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、モチーフの  $L$  関数および周期・レギュレーターに関して、超幾何関数を中心とした特殊関数論を用いて、新たな結果や視点を与える事である。研究開始当初、より具体的な目標として以下の4つを挙げていた。

- ・  $L$  関数に関する研究 . Fermat 曲線を分解して得られるモチーフの  $L$  関数について、その全ての整数点での特殊値を一般超幾何関数を用いて記述する。

- ・ 周期に関する研究 . アーベル型でアーベル体に虚数乗法を持つモチーフの周期に関する Gross-Deligne 予想に関して新たな結果を得る。

- ・ レギュレーターに関する研究 . 超幾何ファイブレーションという多様体族のレギュレーターを一般超幾何関数を用いて記述する。その応用として、超幾何関数の特殊値に関する新たな公式を得る。

- ・  $p$  進類似に関する研究 . 周期、レギュレーター、 $L$  関数の  $p$  進類似 ( $p$  は素数) と  $p$  進超幾何関数との関係に関する研究を行う。

研究の過程で新たに、以下の目的が加わった。

- ・ 有限体上の超幾何関数論 . 古典的な複素数体上の超幾何関数に対する有限体上の類似について、その良い定義を与え、複素数体上の場合と類似する諸性質を証明する。

- ・ 超幾何モチーフの構成 . その複素周期として複素数体上の超幾何関数が現れ、そのフロベニウス・トレースとして有限体上の超幾何関数が現れるようなモチーフ族を構成する。

### 3. 研究の方法

虚数乗法を持つモチーフの周期に関する Bruno Kahn 氏との共同研究を進めるために、2018 年度に Kahn 氏を千葉大学に招聘した。また、2019 年度には研究代表者が Jussieu 数学研究所を訪問し、Kahn 氏と研究打ち合わせを行った。

朝倉政典氏との共同研究を進めるために、千葉大学および北海道大学において研究打ち合わせを行った。特に 2022 年度には、超幾何モチーフを用いたアデールの超幾何関数の構成について議論を行った。

本研究を推進するために、2019 年に国際研究集会「Regulators in Niseko」、2022 年に国際研究集会「Motives and L-functions」を開催した。両研究集会では、レギュレーターおよびモチーフの  $L$  関数に関する最新の研究についての情報を得るとともに、参加者との討論によって本研究に有意義な知見を得ることができた。

超幾何関数の変換公式に関する結果、有限体上の超幾何関数に関する結果、超幾何モチーフの構成および  $p$  進超幾何関数に関する結果、等は研究集会等で発表し、専門家との議論を行った。ま

た, モチーフ (または保型形式) の  $L$  関数の特殊値とレギュレーターに関して, 伊東良純氏および根本裕介氏と議論を重ねた.

#### 4. 研究成果

虚数乗法を持つモチーフの周期に関する Gross-Deligne 予想について, Bruno Kahn 氏との共同研究を進めた. 予想を精密化し, さらにその  $l$  進類似および  $p$  進類似 ( $l$  と  $p$  はともに素数) を定式化した. そして, これら 3 つの予想がアーベル型のモチーフの場合に成り立つということを証明した.

超幾何ファイブレーションと呼ばれる構造を持つ多様体族のレギュレーターに関する朝倉政典氏, 寺杉友秀氏らとの共同研究 ([1], [2], [3]) では, 周期およびレギュレーターを超幾何関数を用いて記述した. その結果, 超幾何関数またはその特殊値を代数関数または代数的数の  $\log$  で記述する新たな公式を示すことができた.

超幾何関数には非常に多くの変換公式が知られているが, その証明方法は個々の公式によってまちまちであり, 複雑な証明や計算機を用いた証明しか知られていないものもあった. しかし, 論文[4]では, 超幾何微分方程式の Jacobi 標準形を用いた統一かつ簡明な証明法を与えた. この研究は当初の計画になかったものである.

超幾何関数の数論的な性質を調べるためには, その  $l$  進類似 ( $l$  は素数) である有限体上の超幾何関数が重要である. これはガンマ関数・ベータ関数とガウス和・ヤコビ和との古典的な類似の拡張になっている. 有限体上の超幾何関数については, 論文[6]においてその最も自然かつ一般的な定義を与えることができた. 特に, これまで考えられてこなかった合流型の超幾何関数や, さまざまな多変数超幾何関数の有限体上の類似についても考えられるようになった. その結果, 古典的な複素数体上の超幾何関数に関する諸公式 (和公式, 積分表示, 変換公式, 積公式) の有限体類似を得ることができた ([6], 瀬ノ上貴斗氏との共同研究[5]).

一般超幾何関数に対応するモチーフをフェルマー曲線の自己積の部分多様体を用いて構成した. その複素周期は超幾何関数であり, Gauss-Manin 接続は超幾何微分方程式である. さらに, その  $l$  進エタール・コホモロジーへのフロベニウス作用のトレースは対応する有限体上の超幾何関数となる. このモチーフの  $p$  進ホッジ理論による  $p$  進周期として, 新しい  $p$  進超幾何関数を定義することができる. また, 複素数体上および有限体上の超幾何関数の諸性質をモチーフの同形に帰着するということが期待できる. また, 超幾何モチーフを用いてアデル的な超幾何関数を定義することが可能になる.

[1] Masanori Asakura and Noriyuki Otsubo, A functional logarithmic formula for hypergeometric functions  $3F_2$ , Nagoya Math. J. 236 (2019), 29-46.

[2] Masanori Asakura, Noriyuki Otsubo and Tomohide Terasoma, An algebro-geometric study of the special values of hypergeometric functions  $3F_2$ , Nagoya Math. J. 236 (2019), 47-62.

[3] Masanori Asakura and Noriyuki Otsubo, Regulators of  $K_1$  of hypergeometric fibrations, "Arithmetic L-Functions and Differential Geometric Methods", Progress in Math. 338, 1-30, 2021.

[4] Noriyuki Otsubo, A new approach to hypergeometric transformation formulas, The Ramanujan Journal 55(2) (2021), 793-816.

[5] Noriyuki Otsubo and Takato Senoue, Product formulas for hypergeometric functions over finite fields, Research in Number Theory 8(4) (2022), 1-12.

[6] Noriyuki Otsubo, Hypergeometric functions over finite fields, arXiv:2108.06754, 2021.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Otsubo Noriyuki, Senoue Takato	4. 巻 8
2. 論文標題 Product formulas for hypergeometric functions over finite fields	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 1-12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-022-00348-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Noriyuki Otsubo	4. 巻 55
2. 論文標題 A new approach to hypergeometric transformation formulas	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 793-816
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-020-00286-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Asakura Masanori, Otsubo Noriyuki	4. 巻 338
2. 論文標題 Regulators of $K1$ of Hypergeometric Fibrations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Progress in Math.	6. 最初と最後の頁 1~30
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-65203-6_1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masanori Asakura, Noriyuki Otsubo, Tomohide Terasoma	4. 巻 236
2. 論文標題 An algebro-geometric study of the special values of hypergeometric functions ${}_3F_2$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nagoya Math. J.	6. 最初と最後の頁 47-62
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2018.36	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masanori Asakura and Noriyuki Otsubo	4. 巻 236
2. 論文標題 A functional logarithmic formula for the hypergeometric function ${}_3F_2$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nagoya Math. J.	6. 最初と最後の頁 29-46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2018.33	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masanori Asakura and Noriyuki Otsubo	4. 巻 70 (3)
2. 論文標題 CM periods, CM regulators, and hypergeometric functions, I	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Canad. J. Math.	6. 最初と最後の頁 481-514
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/CJM-2017-008-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masanori Asakura and Noriyuki Otsubo	4. 巻 289
2. 論文標題 CM periods, CM regulators, and hypergeometric functions, II	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Math. Z.	6. 最初と最後の頁 1325-1355
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-017-2001-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 大坪紀之
2. 発表標題 Gross-Deligne CM周期予想のl進類似とp進類似
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Noriyuki Otsubo
2. 発表標題 Hypergeometric motives and p-adic periods
3. 学会等名 p-adic Cohomology and Arithmetic Geometry 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大坪紀之
2. 発表標題 超幾何モチーフと種々の実現
3. 学会等名 函数方程式論サマーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大坪紀之
2. 発表標題 有限体上の超幾何関数
3. 学会等名 函数方程式論サマーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大坪紀之
2. 発表標題 超幾何微分方程式のJacobi標準形と変換公式
3. 学会等名 函数方程式論サマーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大坪紀之
2. 発表標題 有限体上の超幾何関数について
3. 学会等名 早稲田大学整数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大坪紀之
2. 発表標題 有限体上の超幾何関数について
3. 学会等名 愛媛大学代数セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Noriyuki Otsubo
2. 発表標題 A new approach to hypergeometric transformation formulas
3. 学会等名 Sendai Workshop on Hypergeometric Series, Mahler Measures, and Multiple Zeta Values（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Noriyuki Otsubo
2. 発表標題 Periodes et motifs CM de type abeien
3. 学会等名 Seminaire de theorie des nombres de l'IMJ-PRG（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Noriyuki Otsubo
2. 発表標題 Hypergeometric motives and p-adic periods
3. 学会等名 Monodromy and hypergeometric functions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Noriyuki Otsubo
2. 発表標題 Invariants of CM motives of abelian type
3. 学会等名 The Asia-Australia Algebra Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大坪紀之
2. 発表標題 超幾何関数の変換公式について
3. 学会等名 第12回玉原特殊多様体研究集会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Noriyuki Otsubo's Home Page  <a href="https://sites.google.com/view/noriyuki-otsubo">https://sites.google.com/view/noriyuki-otsubo</a>          Researchmap  <a href="https://researchmap.jp/n-otsubo">https://researchmap.jp/n-otsubo</a></p>
---



## 6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Regulators in Niseko 2019	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 L-functions and Motives in Niseko 2022	開催年 2022年～2022年

## 8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
フランス	Institut de Mathematiques de Jussieu		