様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　６ 月 ２２ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2020
課題番号：１８Ｋ０３２４０
研究課題名（和文）ある種の正規代数曲面の構造

研究課題名（英文）Structure of certain normal algebraic surfaces

研究代表者
中山　昇（NAKAYAMA, Noboru）

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：１０１８９０７９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,100,000円

研究成果の概要（和文）：正規代数曲面について，(A) 全射で非同型な自己正則写像をもつ正規射影的曲面の構造，(B) 非有理点を持つ正規 4 次曲面の定義方程式，の2つのテーマについて研究するのが目的であった．(A)では困難だった未解決問題を解決し，その結果，ピカール数1の対数的デルペッツォ曲面以外の複素射影的正規代数曲面について，全射で非同型な自己正則写像をもつための必要十分条件を，曲面の構造条件として記述することに成功した．一方 (B)については研究する時間がほとんどなかった．

研究成果の学術的意義や社会的意義
代数多様体の全射自己正則写像については，力学系，数論，代数幾何の立場から様々な研究が行われているが，近年盛んになってきた．主には同型写像を扱うものが多いが，非同型な場合も偏極を保つ自己正則写像の場合に極小モデルや有理点について議論しているものも多数ある．今回の非同型な全射正則写像を持つ正規曲面の場合の分類結果は，非常に具体的であり，これらの研究に応用されることが多いに期待される．

研究成果の概要（英文）：Our purpose is to study (A) the structure of normal projective surfaces admitting surjective non-isomorphic endomorphisms and (B) defining equations of normal quartic surfaces admitting irrational singular points.
On (A), by resolving an unsolved problem, I have determined the structure of such surfaces except for log del Pezzo surfaces of Picard number 1. On the other hand, I had few opportunities to study (B).

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何　代数曲面　自己正則写像

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

(1) 代数多様体の分類論では，多様体の双有理同値類またはその極小モデルの分類が重要だが，以下の (A),(B) のような特殊な状況では，より精密な双正則同値類の分類が期待される．

(A) 自己正則写像を持つ正規射影的代数曲面の構造．

(B) 非有理特異点をもつ 4 次曲面の定義方程式．

なおここでは代数曲面は複素数体上のもののみを扱い，自己正則写像は全射で非同型なもののみを考える．また 4 次曲面とは 3 次元射影空間の 4 次超曲面のことである．なお (A)，(B) の研究の間に直接的なつながりは無い．

(2) (A) について: 自己正則写像および同型写像の研究は力学系の理論として解析学の立場から，過去から現在に至るまで非常に多くの研究がなされているが，写像自身の研究ではなく，写像が定義される多様体の構造を研究することはあまり行われてこなかった．自己正則写像の存在は多様体にかなりの条件を課すが，それから多様体の構造を決定するのは一般に難しい．それでも，代数幾何的手法によってこの多様体の構造を決定することが，非特異射影的代数曲面，非特異コンパクト解析的曲面，および小平次元が非負の非特異 3 次元射影的代数多様体の場合，に成功している．これらは藤本圭男氏や筆者の仕事に依る．さらなる研究の中で，とくに Zhang 氏と行った偏極を保つ自己正則写像の研究で初めて正規代数多様体についても扱うことになった．しかし，正規代数曲面の場合の分類を行ってこなかったことが高次元の場合の研究を妨げているという感触をもち，(A) について研究を始めた．そして 2008 年度から 2011 年度までの基盤研究 (C)(一般)「種々の代数多様体の具体的構成」の中で，少なくとも非有理曲面の場合の分類に成功した．この時作成したプレプリントは草案に近いもので，未公表のまま現在に至っている（しかしこれを引用する論文はかなり多くある）．またこの研究自体も筆者の別のテーマについての研究が始まったため中断することとなった．しかしその後，この未公表のプレプリントのアイデアを使って，(A) に関連する話題である Shokurov 氏のトーリック判定法の類似物が得られた（④）．そこでの結果が (A) の未解決の場合に有用であると思われる．

(3) (B) について: 正規 4 次曲面で非有理特異点をもつものについて，幾何学的構造から理想的な定義方程式を求めることは可能だろうか？ この問いは平面 3 次曲線からワイエルシュトラス標準形を求めることの類似でもある．ここでいう (B) の曲面の幾何学的構造については，1990 年代に行われた石井雄二氏との共同研究（①，発表は 2004 年）で得られた記述を考えている．そこでは「基本三つ組み」や「分離」という独自の概念と極小モデル理論によって幾何学的構造が得られたが，後にその手法は一般化され，指数 2 の対数的デルペッツォ曲面の分類に用いられた（③）．またさらに，対数的デルペッツォ曲面を適当な重み付き射影空間（またはそれらの積）に埋め込み，またその中での定義方程式を与えることにも成功している．論文 ③ で使われた新たな方法なども使って，(B) の 4 次曲面の理想的な定義方程式を求めることができないか，と考え始めたのが (B) の研究の動機である．

２．研究の目的

研究 (A) では自己正則写像を持つ正規射影的代数曲面の構造を決定することが目的である．なお (A) の先行研究は論文として未公表なので，これもまとめて少なくともプレプリントとして

完成させ，それを公表することも目的の一つである．研究 (B) では，正規 4 次曲面で非有理特異点を持つものの（理想的な）定義方程式の形を求めることが目的である．

３．研究の方法
(1) 研究 (A)，(B) ともに酒井文雄氏による正規代数曲面論を基礎にして行う．これは酒井氏が 1980 年代中頃に「対数的代数曲面」などの理論の応用として得られた理論で，多くの成果を挙げられたものだが，1990 年代に盛んになった対数的極小モデルの研究者やそれ以降の人たちにはあまり浸透していないようである．

(2) 研究 (A) では「完全不変因子」という自己正則写像よる引き戻しで保たれる因子に注目し，中でも自己正則写像から唯一つ定まる「特性完全不変因子」を解析することで曲面の構造を調べる，というのが独自のアイデアであり，議論の中核をなす．非特異曲面の場合の論文 ② で鍵となった「自己交点数が負となる曲線」はこの特性完全不変因子の既約成分になる．このアイデアにより，先行研究では，ある種の有理曲面の場合を除いて (A) の曲面の分類を行うことができた．未解決の有理曲面は，非特異な場合と同様にトーリック曲面か，またはその類似物であることが期待される．その証明には ④ で調べた擬トーリック曲面や半トーリック曲面の性質が利用できる．

(3) 研究 (B) で引用している論文 ① において，(B) の曲面は A 型から D 型の４つのタイプに分類され，A 型は非特異平面 4 次曲線上の錐であり，A 型以外の場合，その曲面の最小特異点解消は「極小基本三つ組み」から「分離」によって得られることがわかっている．また A 型，D 型および B 型の簡単な場合では，定義方程式の理想的な形も求められている．残りの場合の定義方程式が ① の発展形である論文 ③ の手法を参考にして得られるのではないかと思われる．なお研究は (A) の方を重要視し，(A) の研究が一段落したところで (B) に取り掛かるつもりであった．

４．研究成果
(1) 研究 (A) については予想以上の成果を得ることができたが，それをまとめた５つの論文（プレプリント）は合わせて約 350 ページあり，その作成に思いの外時間がかかったため，研究 (B) はほとんど手つかずであり，それに対する成果はない．研究 (A) で得られた５つの論文について説明する．これらは全て，京都大学数理解析研究所の「RIMS プレプリント」として公表されている．

(2) 第一の論文では自己正則写像を持つ正規曲面 X とその完全不変因子 D について，(X,D) が高々対数的標準特異点しか持たないことを，X が一般の複素解析的曲面の場合にまで拡張して証明した．なおこれは射影的代数曲面の場合には未公表のプレプリントで得られている．また「本質的ブローアップ」の概念を導入し,多くの場合，自己正則写像の合成が本質的ブローアップに自己正則写像として延長されることも示した．これらの結果はかつて Favre 氏が付値空間の理論をつかって証明されたものを含むが，我々の議論は分岐公式や相対的 2 次元アバンダンス定理などを使う代数幾何的には標準的なものである．

(3) 第二の論文では射影的代数多様体と双有理同値な複素解析的曲面 X が自己正則写像 f をもつときの基本的性質を調べ，とくにこの X は必ず射影的であることや，X が非有理線織曲

面の場合や，特性完全不変因子 S_f に対する対数的標準因子 $K_X + S_f$ が擬有効な場合に，その X の構造の可能性の候補を絞った．また第三の論文では，いくつかの自己正則写像の例を構成し，その結果，上の候補の曲面 X には自己正則写像が存在することがわかった．また X が有理曲面で $K_X + S_f$ が擬正でない場合の性質もいくつか得ることができた．未公表のプレプリントの結果はすべて第二，第三論文に書かれている．さらには S_f の既約成分の個数 n と X のピカール数 ρ について不等式 $n \leq \rho + 2$ が成り立つことを示し，$n \geq \rho + 1$ のとき，X がトーリック曲面かまたは半トーリック曲面になることを証明した．これは ④ 結果の類似でもある．

(4) 第四の論文は第五の論文で必要なトーリック多様体の自己正則写像の具体的構成を行った．よく知られた自己同型写像の場合のように，対応する扇（fan）の理論を利用するのだが，ここではさらに，与えられたある種の位数２の自己同型写像と可換になる全射非同型な自己正則写像まで構成した．第五の論文で，ピカール数 1 の対数的デルペッツォ曲面以外の未解決な場合の曲面の構造を決定した．具体的に言うと，そのような射影的正規代数曲面 X が全射で同型でない自己正則写像をもつための必要十分条件は，代数曲面 Y からの有限次ガロア被覆写像 $\tau : Y \to X$ で X の非特異点上は分岐せず，さらに以下の五つの条件のいずれかを満たすものが存在することである:

- Y は二つの代数曲線の直積であり，そのどちらかは射影直線ではない．
- Y はアーベル曲面．
- Y は楕円曲線上の射影直線による束または錐．
- Y は射影直線上の射影直線束であり，τ のガロア群が束構造を保つ．
- Y はトーリック曲面であり，τ のガロア群の作用が Y の境界因子を保つ．

残されたピカール数 1 の対数的デルペッツォ曲面の場合の構造解明にはまた別のアイデアが必要であると思われる．今回の研究（A）で得られた結果は一般次元の場合，正標数の場合，一般の複素解析的正規曲面の場合，などに応用されることが期待される．すでに，10 年以上前の未公表の論文の段階のものが，数多くの論文に引用されている．

<引用文献>

① Y. Ishii and N. Nakayama, Classification of normal quartic surfaces with irrational singularities, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 941-965.

② N. Nakayama, Ruled surfaces with non-trivial surjective endomorphisms, Kyushu J. Math. **56** (2002), 433-446.

③ N. Nakayama, Classification of log del Pezzo surfaces of index two, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **14** (2007), 293-498.

④ N. Nakayama, A variant of Shokurov's criterion of toric surface, *Algebraic Varieties and Automorphism groups* (eds. K. Masuda, et. al.), pp. 287-392, Adv. Stud. in Pure Math. **75**, Math. Soc. Japan, 2017.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

京都大学数理解析研究所の RIMS プレプリントのホームページ https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/index.html にてプレプリント5編を公表した. RIMS-1920, RIMS-1923, RIMS-1934, RIMS-1941, RIMS-1943 が 該当する.

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関