

令和 6 年 6 月 6 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03244

研究課題名(和文) Stanley-Reisner イデアルの算術階数とその記号的べきの射影次元

研究課題名(英文) Arithmetical rank and projective dimension of powers of Stanley-Reisner ideals

研究代表者

寺井 直樹 (TERAI, Naoki)

岡山大学・環境生命自然科学学域・教授

研究者番号：90259862

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：余次元2のStanley-Reisner環で高いSerre 指数を持つものを分類した。そして、それらに対して算術階数と射影次元が一致することを示した。さらに、 h 列の計算を行い、Serre条件を満たすStanley-Reisner 環に関するある予想の反例を与えた。

Stanley-Reisnerイデアルの3乗以上の記号的べき及び通常べきがlevelとなる必要十分条件はもとのStanley-Reisnerイデアルが等次数で生成される完全交差イデアルであることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

私が研究している可換環論は代数学の基礎をなす学問のひとつで代数幾何、整数論の基礎的なツールであるとともに可換環独自の問題意識からも今日も活発に研究されている。私は組合せ論的可換環論という組合せ論を用いて多項式内の単項式イデアルを調べるという可換環論を研究している。この分野は計算機の進歩に伴ってした側面があり、それらとの親和性も強い。本研究は可換環論的方法のみでは扱えなかった問題に対して組合せ論的、位相幾何学的なアプローチも用いて問題解決を目指した基礎研究である。

研究成果の概要(英文)：We gave a classification of Stanley-Reisner rings of codimension two with some higher Serre index. By using this classification, we show the equality of projective dimension of the Stanley-Reisner rings and the arithmetical rank of their Stanley-Reisner ideals. Moreover, our classification allows us to compute the h -vectors and give a negative answer to some question regarding to these vectors.

We showed that third or more ordinary or symbolic powers of Stanley-Reisner ideals are level if and only if they are equi-generated complete intersections.

研究分野：可換環論

キーワード：Stanley-Reisner ring simplicial complex edge ideal arithmetical rank projective dimension depth Serre's condition local cohomology

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

イデアルの算術階数とは、そのイデアルが定義する空間がスキーム構造を無視して何枚の超曲面の交わりとして表現されるかという最小数、あるいは、イデアルの言葉では、そのイデアルと根基イデアルを同じくするイデアルの中で極小生成系の元の個数が最小であるものの極小生成系の元の個数である。イデアルの算術階数を求めることは可換環論・代数幾何学における伝統的な問題である。Stanley-Reisner イデアルの場合、その Stanley-Reisner 環の射影次元が Stanley-Reisner イデアルの算術階数の下限を与えていることが知られている。それで、いつこの二つの不変量が一致するかを問題にしてきた。これまでの研究成果として次のような場合に上の二つの不変量が一致することを示すことにより算術階数を決定してきた。

- ・算術次数が最小次数に十分近い Stanley-Reisner イデアル
- ・生成元の個数がそのイデアルの高さに十分近い Stanley-Reisner イデアル
- ・次数 2 の線形自由分解を持つ Stanley-Reisner イデアル
- ・単体的複体が 1 次元 Gorenstein となる Stanley-Reisner イデアル
- ・次数 2 の squarefree lexsegment イデアル
- ・生成元の個数が 5 以下の Stanley-Reisner イデアル
- ・算術次数が 4 以下の Stanley-Reisner イデアル
- ・Castelnuovo-Munford 正則数が生成元の個数より 2 だけ小さい線形自由分解を持つ Stanley-Reisner イデアル

さらに基盤研究(C)「Stanley-Reisner イデアルの極小自由分解と算術階数」(平成 23 ~ 25 年度)の研究成果のひとつとして、研究代表者は連携研究者の木村杏子とともに林の辺イデアルの算術階数はその剰余環の射影次元に等しいという Barile の予想に対して肯定的な答えを与えた。また、Stanley-Reisner イデアルが高さ 3 で Gorenstein であるとき算術階数が 3 であることも示した。

これらの結果を受けて、さらに他の単項式イデアルのクラスに対しても算術階数を決定できることが期待された。

また Stanley-Reisner イデアルの(記号的)べきについては次のような結果を得ている。

・Stanley-Reisner イデアルに対して、その 3 乗以上の(記号的)べきが Cohen-Macaulay であれば任意の(記号的)べきは Cohen-Macaulay である。

そこで Cohen-Macaulay 以外の性質についても考察することが期待される場所であった。

さらに Stanley-Reisner イデアルの記号的べきの射影次元に関してはべきに関して非減少か? という問いが存在する。基盤研究(C)「Stanley-Reisner イデアルの算術階数とべきの射影次元」(平成 26 ~ 28 年度)の研究成果のひとつとして、強良被覆グラフの辺イデアルの場合にも記号的べきの射影次元に関してべきに関して広義単調増加であることを示した。良被覆をもつ 2 部グラフは強良被覆グラフであり、2 部グラフの辺イデアルの記号的べきは通常べきに等しいことから、良被覆をもつ 2 部グラフの辺イデアルの通常べきの射影次元はべきの大きさに関して広義単調増加であることも示せ

たことになる。

さらに、次数 1 の頂点をもつグラフの辺イデアルに対しても記号的べきの射影次元に関して広義単調増加であることを示した。さらに一般的な辺イデアルの場合にも記号的べきの射影次元に関してべきに関して広義単調増加であることが期待された。

2. 研究の目的

被約単項式イデアルである Stanley-Reisner イデアル及び、多項式環を Stanley-Reisner イデアルで割った環である Stanley-Reisner 環は可換環論的観点のみならず Stanley-Reisner 環から定まる単体的複体を通して組合せ論、トポロジーとも深く関係しており、とても興味深い研究対象である。本研究は Stanley-Reisner イデアル及び Stanley-Reisner 環の極小自由分解の長さである射影次元と Stanley-Reisner イデアルの算術階数との関係をまず問題とする。Stanley-Reisner イデアルの場合、その Stanley-Reisner 環の射影次元が Stanley-Reisner イデアルの算術階数の下限を与えていることが知られている。それで、いつこの二つの不変量が一致するかが問題の焦点となる。本研究においては余次元が小さい場合について 2 つの量が一致することを示すことを目標とした。2 つ目の目標は Stanley-Reisner イデアルの記号的べきがいつ level となるかを決定することである。

3. 研究の方法

Stanley-Reisner イデアルの極小自由分解についてその可換環論的、組合せ論的性質を考察するために、まず具体的な Stanley-Reisner イデアルについて組織的に射影次元及び算術階数の計算を行い、データを収集した。それらのデータから帰納的に組合せ論的法則、代数的メカニズムを推測し証明しようと試みた。2 乗が CM となる条件については licci 性に関連付けて調べた。3 乗以上のべきが Cohen-Macaulay になる必要十分条件は元の Stanley-Reisner イデアルが完全交差であることはすでにわかっているので 2 乗に焦点を当てた。その 2 乗が Cohen-Macaulay 性をもつ Stanley-Reisner イデアルについて Giancarlo Rinaldo とともにデータベース作りを行った。Cohen-Macaulay 性をもつ Stanley-Reisner イデアルは Gorenstein 性を持つ。特に低次元の場合は対応する単体的複体が球面であることがわかるので、Frank H. Lutz が作った球面の三角形分割のデータベースを利用して、そのうちから 2 乗が Cohen-Macaulay 性をもつ Stanley-Reisner イデアルを抽出した。また、licci 性をもつ Gorenstein Stanley-Reisner イデアルはその 2 乗が Cohen-Macaulay 性をもつので、そのリストの中から、licci 性をもつ Gorenstein Stanley-Reisner イデアルを特定した。

以上のように、組合せ論的観点、位相幾何学的観点、純可換環論的観点のそれぞれの長所をとりいれ、研究代表者、研究分担者の間で緊密な連絡をとりながら総合的に研究していった。

4. 研究成果

(1) Stanley-Reisner イデアルの 3 乗以上の記号的べき及び通常べきが level となる必要十分条件はもとの Stanley-Reisner イデアルが等次数で生成される完全交差イデアルとなることを示した。このことから Stanley-Reisner イデアルの 3 乗以上の記号的べき及び通常べきが Gorenstein となる必要十分条件はもとの Stanley-Reisner イデアルが単項生成イデアルとなることもわかった。

(2) 昔から高さ3の Gorenstein イデアルは licci であることが知られているので、高さ4の Gorenstein Stanley-Reisner イデアルの licci 性について研究を始めた。3次元球面の頂点数が少ない場合の3角形分割に関する Lutz のデータベースを用いることにより4次元以下の高さ4の Gorenstein Stanley-Reisner イデアルについて licci 性であることと2乗が Cohen-Macaulay になることが同値であることを示した。

(3) 高さ3の level Stanley-Reisner イデアルを4次元以下の場合について計算機を用いて分類し、その licci 性はねじれ余正規加群が Cohen-Macaulay 加群が Cohen-Macaulay となることと同値であることを示した。

(4) イデアルの生成元が2次であるものに限って調べ、2乗が Cohen-Macaulay 性をもつ Stanley-Reisner イデアル環の次元が4以下のときは頂点数が13個以下で抑えられることが分かったのでその場合について分類を行った。一般の Gorenstein Stanley-Reisner イデアルについては2乗の Cohen-Macaulay 性と(S2)性が同値であるかという問いに関して同値でないことを示す反例が見つかったが、イデアルの生成元が2次であるものに限れば、同値になることを示した。

(5) 良被覆グラフの辺イデアルの高さは不定元の個数の半分以上であることが知られており、エッジイデアルの高さが丁度、不定元の個数の半分である良被覆グラフは強良被覆グラフと呼ばれている。強良被覆グラフの Cohen-Macaulay 性については過去の共同研究において調べた(M. Crupi, G. Rinaldo, N. Terai, Cohen-Macaulay edge ideal whose height is half of the number of vertices, Nagoya Mathematical Journal 201(2011), 117-131)。その拡張として辺重み付き強良被覆グラフの辺イデアルについて考察した。Cohen-Macaulay 辺重み付き強良被覆グラフの辺イデアルの非混合性と Cohen-Macaulay が同値であることを示し、またその条件を辺の重みの条件で記述した。

また、頂点重み付き有向グラフにおいて底グラフが Cohen-Macaulay であるとき、非混合性と Cohen-Macaulay 性が同値であることが予想されていたのであるが、その予想に対して反例を構成した。

(6) 強良被覆グラフの辺イデアルに対してこれらの不変量を局所ホモロジーを用いて分析した。結果として

M. Mahmoudi, A. Mousivand, M. Crupi, G. Rinaldo, N. Terai, S. Yassemi, Vertex decomposability and regularity of very well-covered graphs, J. Pure Appl. Algebra 215 (10) (2011) 2473-2480.

で与えた Castelnuovo-Mumford 正則度を強良被覆グラフのグラフ論的不変量で表す公式や

K. Kimura, N. Terai, S. Yassemi, The projective dimension of the edge ideal of a very well-covered graph, Nagoya Math. J. 230 (2018) 160-179.

で与えた射影次元強良被覆グラフのグラフ論的不変量で表す公式と異なる新たな公式を与えた。

(7) イラン人数学者 M. R. Pournaki, M. Poursoltani, S. Yassemi と次のような共同研究を行った。Stanley-Reisner 環の局所コホモロジーの双対加群の次元からなるベクトルに着目した。このベクトルは Stanley-Reisner 環の Serre 指数や深さの情報を含むものである。それにより深さの下限に関する定理を示した。また、余次元2で高い Serre 指数を持つものを分類した。それを用いてそれらに対して算術階数と射影次元が一致することを示した。さらに、 h 列の計算を行い、Serre 条件を満たす Stanley-Reisner 環に関するある予想の反例を与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 14件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Pournaki M. R., Poursoltani M., Terai N., Yassemi S.	4. 巻 36
2. 論文標題 Simplicial Complexes Satisfying Serre's Condition versus the Ones Which Are Cohen-Macaulay in a Fixed Codimension	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 2506 ~ 2522
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/21M1439687	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Pournaki M. R., Shibata K., Terai N., Yassemi S.	4. 巻 50
2. 論文標題 A note on monomial ideals which are Cohen-Macaulay in a fixed codimension	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 4988 ~ 4996
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2022.2079663	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ene Viviana, Rinaldo Giancarlo, Terai Naoki	4. 巻 9
2. 論文標題 Sequentially Cohen-Macaulay binomial edge ideals of closed graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Research in the Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 17pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40687-022-00334-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kimura K., Pournaki M.R., Terai N., Yassemi S.	4. 巻 606
2. 論文標題 Very well-covered graphs and local cohomology of their residue rings by the edge ideals	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 1 ~ 18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2022.04.021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kimura K., Pournaki M. R., Seyed Fakhari S. A., Terai N., Yassemi S.	4. 巻 9
2. 論文標題 A glimpse to most of the old and new results on very well-covered graphs from the viewpoint of commutative algebra	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Research in the Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 18pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40687-022-00326-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Seyed Fakhari Seyed Amin, Shibata Kosuke, Terai Naoki, Yassemi Siamak	4. 巻 49
2. 論文標題 Cohen-Macaulay edge-weighted edge ideals of very well-covered graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 4249 ~ 4257
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2021.1917590	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Rinaldo Giancarlo, Terai Naoki, Yoshida Ken-Ichi	4. 巻 331
2. 論文標題 Licci Level Stanley-Reisner Ideals with Height Three and with Type Two	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Combinatorial Structures in Algebra and Geometry(Springer Proceedings in Mathematics & Statistics)	6. 最初と最後の頁 123 ~ 142
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-52111-0_10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ene Viviana, Rinaldo Giancarlo, Terai Naoki	4. 巻 175
2. 論文標題 Licci binomial edge ideals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6. 最初と最後の頁 105278 ~ 105278
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jcta.2020.105278	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Rinaldo Giancarlo, Terai Naoki	4. 巻 44
2. 論文標題 4-Dimensional Licci Gorenstein Stanley-Reisner Ideals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Vietnamica	6. 最初と最後の頁 691 ~ 700
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40306-019-00339-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hoang Do Trong, Rinaldo Giancarlo, Terai Naoki	4. 巻 7
2. 論文標題 Cohen-Macaulay and (S2) Properties of the Second Power of Squarefree Monomial Ideals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 684 ~ 684
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/math7080684	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Minh Nguyen Cong, Terai Naoki, Thuy Phan Thi	4. 巻 535
2. 論文標題 Level property of ordinary and symbolic powers of Stanley-Reisner ideals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 350 ~ 364
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2019.05.044	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Caviglia Giulio, Ha Huy Tai, Herzog Jorgen, Kummini Manoj, Terai Naoki, Trung Ngo Viet	4. 巻 49
2. 論文標題 Depth and regularity modulo a principal ideal	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1 ~ 20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10801-018-0811-9	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Pournaki M.R., Poursoltani M., Terai N., Yassemi S.	4. 巻 632
2. 論文標題 On the dimension of dual modules of local cohomology and the Serre's condition for the unmixed Stanley-Reisner ideals of small height	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 751 ~ 782
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2023.05.031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Rinaldo Giancarlo, Terai Naoki	4. 巻 17
2. 論文標題 Licci level Stanley-Reisner ideals with height three	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 345 ~ 386
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40863-022-00326-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計13件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 寺井直樹
2. 発表標題 余次元の小さいStanley-Reisner環について
3. 学会等名 東京可換セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 寺井直樹
2. 発表標題 Stanley--Reisner rings with low codimension
3. 学会等名 第43回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 寺井直樹
2. 発表標題 The dual modules of the local cohomology of Stanley-Reisner rings with low codimension
3. 学会等名 Algebra & Number Theory Seminar Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 寺井直樹
2. 発表標題 Cohen-Macaulay property of weighted edge ideals of very well-covered graphs
3. 学会等名 IIT Bombay Virtual Commutative Algebra Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柴田孝祐, 寺井直樹
2. 発表標題 Edge-weighted edge ideals of very well-covered graphs
3. 学会等名 オンライン研究集会 組合せ論と可換環論 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 寺井直樹
2. 発表標題 Cohen-Macaulay property of edge-weighted very well-covered graphs
3. 学会等名 One day workshop on commutative algebra and related fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 寺井直樹
2. 発表標題 Cohen-Macaulay and (S2) properties of the second power of squarefree monomial ideals
3. 学会等名 Vietnam - US Joint Mathematical Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺井直樹
2. 発表標題 Licci level Stanley-Reisner rings with codimension 3 and with Cohen-Macaulay type 2,
3. 学会等名 第32回可換環論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺井直樹
2. 発表標題 Licci level Stanley-Reisner rings with codimension three and with Cohen-Macaulay type two
3. 学会等名 One day workshop on commutative algebra and related fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺井直樹
2. 発表標題 Licci level Stanley-Reisner ideal について
3. 学会等名 組合せ論と可換代数オータムセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺井直樹
2. 発表標題 4-dimensional Gorenstein licci Stanley-Reisner ideals
3. 学会等名 可換環論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 寺井直樹
2. 発表標題 Level Stanley-Reisner rings with codimension two
3. 学会等名 Commutative Algebra and its interaction with Algebraic Geometry and Combinatorics 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 寺井直樹
2. 発表標題 2-Cohen-Macaulay Stanley-Reisner rings with codimension two
3. 学会等名 第44 回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	木村 杏子 (KIMURA Kyouko) (60572633)	静岡大学・理学部・准教授 (13801)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	吉田 健一 (YOSHIDA Ken-ichi) (80240802)	日本大学・文理学部・教授 (32665)	
研究分担者	宮崎 誓 (MIYAZAKI Chikashi) (90229831)	熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・教授 (17401)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イラン	University of Tehran	Sharif University of Technology		
イタリア	University of Messina			
ルーマニア	Ovidius University			
ベトナム	Institute of Mathematics	Hanoi National University of Education		