

令和 5 年 5 月 19 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03246

研究課題名（和文）代数的層のモジュライの研究

研究課題名（英文）Study on moduli spaces of algebraic sheaves

研究代表者

阿部 健（Abe, Takeshi）

熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・准教授

研究者番号：90362409

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000 円

研究成果の概要（和文）：代数多様体の研究においては、その上の直線束を調べるのが基本的である。その高階数版として代数多様体上のベクトル束は自然な研究対象になる。ベクトル束のモジュライ上には一般テータ因子が存在し、これの大域切断にかんする双対性としてStrange dualityという現象がある。本研究では、代数曲線上のholomorphic tripleに関するstrange dualityの部分的結果、次数5, 6のDel Pezzo曲面上の高さ零のモジュライ空間のquiverの表現としての表示、および一般な超曲面内の幾何種数零の部分多様体についての結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数学の研究では「双対性」（「そうついせい」と読む）が様々な状況で登場する。双対性とは、大体次のようなものである。今Aという対象があり、それを鏡に映すと、Aとそっくりな、しかしAとは異なるBという像が見える。鏡の中の世界から見ると、Bという対象の像としてAが見えるであろう。双対性とはこの例のような二つの対象AとBの組の間の関係性のことである。数学の研究において様々な双対性の発見は数学的对象の間に明快な関係を与えるという意味でとても意義深いことである本研究で取り組んだstrange dualityもそのような双対性の一つである。

研究成果の概要（英文）：It is fundamental to study line bundles in the study of algebraic varieties.

As a higher rank version, vector bundles are also basic object to study. There is a phenomena called strange duality which concerns generalized theta divisors on the moduli spaces of vector bundles. In this research, we obtain the following result : a partial result on the strange duality of holomorphic triples on a curve; a representation of height zero moduli spaces of algebraic sheaves on a del Pezzo surface of degree 5 or 6 as a quiver representation; a result on subvarieties of geometric genus zero in a general hypersurface in a projective space.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ベクトル束 モジュライ

1. 研究開始当初の背景

代数曲線上のベクトル束のモジュライ空間上の一般テータ因子の大域切断に関する strange duality は Belkale, Marian-Oprea によって 10 年ほど前に証明されていた。代数曲面上の層のモジュライに対する strange duality は, Marian-Oprea, Yoshioka らによってアーベル曲面, K3 曲面, 楕円曲面の場合には大部分証明されていたが, 射影平面などの有理曲面に対しては, 本研究者や Yuan, Goettsche らによる部分的結果はあるものの, まだ多くの場合が未解決である。

2. 研究の目的

代数曲面上の strange duality に関しては, 有理曲面に対して多くの場合に未解決であるので, これらを解決するのが最大の目的であった。また, その試みの過程で派生して生じる課題に対しても定式化および証明することが目的である。

これが研究当初の研究目的であったが, 研究期間の後半では新たに, ベクトル束の正值性を応用する手法による射影空間内の一般な超曲面に含まれる部分多様体についての幾何学的性質の解明が, 研究目的として加わった。これについては研究動機とともに「研究成果」の欄で詳細を述べる。

3. 研究の方法

Strange duality の研究において本研究者は過去に, 次の二つの方法で部分的結果を得ていた。

- Quasi-bundle の変形を用いる手法
- Quiver の表現空間に関する Derksen-Weyman の双対性を用いる手法。

代数曲面が曲線上の射影直線束の場合, 代数曲面上の層と底曲線上のベクトル束の組とその間の射が対応する。この対応を用いて曲面上の strange duality を調べる方法を試みる。

4. 研究成果

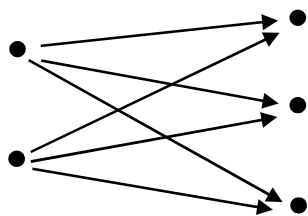
(1) 有理曲面上の層の strange duality の解決を視野に入れて, 代数曲線上の層ベクトル束に対する strange duality の研究を行った。層の中でも最も簡単な層である



に対する層ベクトル束は holomorphic triple と呼ばれている。すなわち, holomorphic triple とは, ベクトル束 E と F 及び E から F への射の三つ組みのことである。Hein-Truong は代数曲線上の holomorphic triple のモジュライ空間上の一般テータ因子について議論した。射影直線上のベクトル束は直線束の直和であるため, それらのモジュライ空間は自明であるが, holomorphic triple については射影直線上であってもモジュライは正の次元を持つ。そこで論文 では, まず射影直線上の holomorphic triple に対して strange duality 予想を定式化した。そしてその予想の肯定的証拠として, E の階数が 1 の場合に予想を証明した。

(2) 本研究者は射影平面上の層のモジュライに関する strange duality 予想に関していくつか部分的な結果を得ている。論文 では strange duality に現れる 2 つのモジュライ空間のうち 1 つが高さ零であるなら strange duality が成り立つ, ということを証明している。その論文では Drezet により定義された射影平面上の層のモジュライ空間に対する「高さ」という量および高さ零のモジュライ空間がクロネッカー層の表現空間に一致するという事実が使われていた。これらの事実は論文 で, 2 次曲面上の第 1 チャーン類が対称な層のモジュライ空間に対してその類似が成り立つことが示されている。証明では Bridgeland 安定性が使われる。さらにこれを用いて, 第 1 チャーン類が対称なものに限るが, 論文 の結果の類似が 2 次曲面に対しても成り立つこと, すなわち strange duality に現れる層のモジュライ空間のうち一方が高さ零なら strange duality が成り立つことが主張されている。これらの研究が上手く行った要因は, 層のモジュライ空間に対して「高さ」という量が定義され, 高さ零のモジュライ空間が層の表現空間と同型になる, という事実である。そこで, 射影空間や 2 次曲面以外でこのようなことが成り立つ場合を探してみる, というのは自然な問題意識である。Drezet の論文や本研究者の論文 の議論をよく見てみると, 第 1 チャーン類が対称なベクトル束の 3-block exceptional collection が重要な役割を果たしていることが分かる。論文 で Karpov-Nogin は Del Pezzo 曲面上の 3-block exceptional collection を決定している。彼らのリストを見ると, 射影平面と 2 次曲面の他に, 第 1 チャーン類が対称な 3-block exceptional collection を持つ Del Pezzo 曲面は次数 5 と 6 の Del Pezzo 曲面であることが分かる。そこで論文 で, これらの Del Pezzo 曲面に対して, 第 1 チャーン類が対称な半安定層が存在するチャーン類の決定を行い, それを用いて層のモジュライ空間の「高さ」を定義し, 最後に高さ零のモジュライ空間が層の表現空間と同型になることを証明した。証明自身は 2 次曲面の場合と同様であるが, 2 次曲面の場合より複雑な層が現れるのが興味深い, 例えば, 次数 6 の Del Pezzo 曲面上の第 1 チャーン類が 0 で第 2 チャ

ーン類が r であるような階数 r の半安定層のモジュライ空間は



という籠の表現空間と同型になることが示される．

(3) この研究成果は、ベクトル束のモジュライに関するものではなく、ベクトル束の positivity を応用して得られたものである．射影空間内の次数の高い一般な超曲面は小林双極的であろう、という小林予想(この予想は 2017 年に Brotbek によって証明された)の代数的類似として、1990 年代に Ein, Voisin は、 $d > 2n-1-k$ のとき n 次元射影空間内の一般な d 次超曲面内の k 次元部分多様体は一般型であることを示していた．これが小林双極性の代数的類似である理由は、Lang が、非特異射影的複素代数多様体が小林双極的であることはその部分多様体が全て一般型であることと同値であろう、と予想しているからである．(この Lang の予想は未解決．) すなわち、Ein, Voisin の結果より、 $d > 2n-2$ なら n 次元射影空間内の一般な d 次超曲面の部分多様体は全て一般型となる．さて、不等式 $d > 2n-2$ をさらに改善できないか、というのは自然な問いであるが、これは出来ない．というのも、 $d = 2n-2$ とのとき n 次元射影空間内の d 次超曲面は射影直線を含むからである．Green-Griffiths-Lang 予想は、一般型の射影代数多様体 X に対し、Zariski 閉な真部分集合 Z があり、複素平面から X への正則写像の像は全て Z に含まれるであろう、という予想である．これの代数類似は、 Z に含まれない部分多様体は全て一般型である、というものであろう．Clemens-Ran は $d > (3n-k)/2+1$ なら n 次元射影空間内の一般な d 次超曲面内の k 次元部分多様体は超曲面に含まれる直線の和集合に含まれないならば一般型であることを示していた．特に、 $d > (3n+1)/2$ ならば、 n 次元射影空間内の一般な d 次超曲面 X に対し、 X 内に含まれる射影直線の和集合を Z とすると、 Z に含まれない X の部分多様体は一般型であることが従う．さらに d の値が小さくなった場合について考察したのがここで述べる研究成果である．本来ならば、上述した一般型に関する研究を d が小さい場合に行いたかったのであるが、技術的な理由により、幾何種数零に関する研究を行った．実は、上記の Ein, Voisin, Clemens-Ran の結果には、幾何種数零に関する結果もある．上述の不等式をひとつ弱めた場合、結論の「一般型」の部分「幾何種数正」に置き換えて成立する、というものである．本研究者は、論文において次の結果を得た． $d > (7n-2k+18)/5$ のとき、 n 次元射影空間内の一般な d 次超曲面内の幾何種数零の k 次元部分多様体は直線または 2 次曲線の和集合である．特に、 $d > (7n+16)/5$ のときは X 内の有理曲線は直線または 2 次曲線であると分かる．これは Voisin による予想、 n 次元射影空間内の次数が $n+2$ 以上の一般な超曲面上の有理曲線の次数は有界であろう、に対して肯定的な証拠を与えている．

< 引用文献 >

- Abe, Takeshi A note on strange duality for holomorphic triples on a projective line. Manuscripta Math. 159(2019), no. 3-4, 363-377.
- Abe, Takeshi Semistable sheaves with symmetric c_1 on del Pezzo surfaces of degree 5 and 6. Eur. J. Math. 7 (2021), no. 2, 526-556.
- Abe, Takeshi Subvarieties of geometric genus zero of a very general hypersurface. Algebr. Geom. 10 (2023), no. 1, 41-86.
- Abe, Takeshi Strange duality for height zero moduli spaces of sheaves on P^2 . Michigan Math. J. 64 (2015), no. 3, 569-586.
- Semistable sheaves with symmetric c_1 on a quadric surface. Nagoya Math. J. 227 (2017), 86-159.
- Karpov, B.V., Nogin, D.Yu.: Three-block exceptional sets on del Pezzo surfaces. Izv. Math. 62(3), 429-463 (1998)

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

1 . 著者名 Takeshi Abe	4 . 巻 7
2 . 論文標題 Semistable sheaves with symmetric c1 on Del Pezzo surfaces of degree 5 and 6	5 . 発行年 2021年
3 . 雑誌名 European Journal of Mathematics	6 . 最初と最後の頁 526-556
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40879-020-00434-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1 . 著者名 Takeshi Abe	4 . 巻 159
2 . 論文標題 A note on strange duality for holomorphic triples on a projective line	5 . 発行年 2019年
3 . 雑誌名 manuscripta mathematica	6 . 最初と最後の頁 363-377
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-018-1083-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1 . 著者名 Abe Takeshi	4 . 巻 10
2 . 論文標題 Subvarieties of geometric genus zero of a very general hypersurface	5 . 発行年 2023年
3 . 雑誌名 Algebraic Geometry	6 . 最初と最後の頁 41-86
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14231/AG-2023-002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件／うち国際学会 1件）

1 . 発表者名 Takeshi Abe	
2 . 発表標題 A note on strange duality for holomorphic triples on a projective line	
3 . 学会等名 Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces（招待講演）（国際学会）	
4 . 発表年 2019年	

1. 発表者名 阿部 健
2. 発表標題 Semistable sheaves with symmetric $\mathcal{S}_1$ on a quadric surface
3. 学会等名 ベクトル束の分裂・構成・安定性とその応用（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 阿部 健
2. 発表標題 A note on strange duality for holomorphic triples on a projective line
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Moduli Theory（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takeshi Abe
2. 発表標題 Subvarieties of geometric genus zero of a very general hypersurface
3. 学会等名 TIFR Algebraic Geometry seminar (online)（招待講演）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------