

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：18001

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03248

研究課題名(和文) 表現論的構造のパラメタ変形がもたらす特殊関数・組合せ論の研究

研究課題名(英文) Special functions and combinatorics arising from parametric deformations of representation-theoretical structures

研究代表者

木本 一史 (Kimoto, Kazufumi)

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：10372806

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：行列式と調和振動子をパラメタによって変形したものを中心に研究した。前者については、プレシズムの既約分解に関する既知の結果への新たなアプローチによる重複度の具体的計算、有限群とその部分群の対が定めるケーリーグラフの類似のスペクトル、行列式のパラメタ変形およびそこから定まる相対不変式がもたらす表現論・組合せ論的対象の記述と応用などについて研究した。後者については調和振動子のパラメタ変形について、そのスペクトルゼータ関数の特殊値の構造とそこから生じる保型積分の一般化、密接に関係する相互作用モデルのパラメタ変形における固有値縮退、アペリ型数列の満たす超合同関係式などについて研究した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

行列式や調和振動子といった具体的対象の場合について、「対称性の高い数学的対象」のパラメタ変形がもたらす「対称性の崩れを表す量」は数学的に興味深い対象となるだろうという作業仮説的期待を支持するような結果およびそこから広がるに関する知見を積み重ねることが出来た。

研究成果の概要(英文)：We have focused on determinants and harmonic oscillators and their deformation by parameters.

Regarding the former, we have studied the followings: concrete calculations on the known result of the multiplicities in the irreducible decomposition of the plethysms by a new approach, the spectrum of the analog of the Cayley graph determined by pairs of finite groups and their subgroups, the description and applications of representation-theoretic and combinatorial objects brought by the parameter deformation of determinants and the relative invariants derived from them. In the latter, we have studied the followings: parameter deformations of harmonic oscillators, including the structure of special values of their spectral zeta functions and the generalization of the automorphic integrals arising from them, eigenvalue degeneration in parameter deformations of closely related interaction models, and supercongruences satisfied by the Apery-like numbers.

研究分野：表現論

キーワード：表現論 組合せ論 整数論 パラメタ変形

1. 研究開始当初の背景

(1) 研究の立脚点となる考え方

本研究課題は、適当な意味で対称性の高い対象に「良い」パラメタ変形を施したとき、その変形によって生じる「ずれ」を適当に定量化することで得られる「対称性の崩れ方を反映する量」は興味深い量となるであろう、という枠組みと期待に立脚し、具体的対象としてアルファ行列式と呼ばれる行列式のパラメタ変形、およびその特殊化を元に定義されるリース行列式という（一般線型群の自然な掛け算作用に関する）相対不変式、それから非可換調和振動子と呼ばれる量子調和振動子のパラメタ変形、その固有値がさだめるスペクトルゼータ関数、特にその特殊値、を扱うものであった。

以下ではまず、本研究のキーワードであるこれら「アルファ行列式・リース行列式」「非可換調和振動子とそのスペクトルゼータ関数」について、これまでの研究成果を交えながら、研究開始当初におけるそれぞれの背景を簡単に説明する。

(2) アルファ行列式について

アルファ行列式とは通常の行列式のパラメタ α による変形であり、

$$\det^{(\alpha)}(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{v(\sigma)} x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} \cdots x_{\sigma(n)n} \quad (X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n})$$

によって定義される (Vere-Jones, 1988). ここに $v(\sigma)$ は行列のサイズ n から置換 σ をサイクル分解したときのサイクルの個数を引いたものである. アルファ行列式は通常の行列式 ($\alpha = -1$ の場合) とパーマメント ($\alpha = 1$ の場合) とをパラメタ α で補間している量である.

行列成分 x_{ij} を変数と見て、これらの変数に関する多項式環に普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$ を自然に作用させるとき、行列式とパーマメントは共に既約表現を生成する巡回ベクトルとなる. 従ってアルファ行列式の冪が生成する巡回加群 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n) \cdot \det^{(\alpha)}(X)^m$ の構造を調べることは“アルファ行列式の行列式やパーマメントからの「ずれ」”を表現のレベルで見ることと相当すると言える. この巡回加群の構造が退化するようなパラメタに対する条件が記述でき、いくつかの特別な場合には既約分解における既約成分の重複度を具体的に求められる. 特に $n=2$ のときには構造が退化するパラメタがある超幾何多項式の根として記述される. この問題の q -類似 (量子群類似) を考えることも出来、やはり $n=2$ の場合には具体的な結果がある.

上述の巡回加群が退化するパラメタの一つである $\alpha = -1/k$ (k は正整数) のときのアルファ行列式から $n \times kn$ 行列に対して定義されるリース行列式と呼ばれる GL_n -相対不変式を定めることできる. これは長方形行列をデータとする構造 (有限群とその部分群の対など) の不変量の構成に利用できると期待される. また、対称群上の帯球関数の値をリース行列式で表す公式や、ラテン方阵に関する Alon-Tarsi 予想の同値命題がリース行列式の言葉で書ける、などといった広がりを持つ.

(3) 非可換調和振動子について

次に非可換調和振動子とは、2つの実パラメタ α, β を含む行列型微分作用素

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 \right) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \right)$$

によって与えられる常微分方程式系である (Parmeggiani-Wakayama, 2002). パラメタに関する適当な条件の下で Q は $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$ 上の非有界な正定値自己共役作用素を定め、しかも離散固有値のみを持つ (以下、この条件を常に仮定する). 2つのパラメタの値が等しいとき Q は調和振動子の組 (の定数倍) とユニタリ同値になり、この意味で調和振動子のパラメタ変形とみなすことができる.

調和振動子の場合はその固有値を完全に決定できるが、一般の非可換調和振動子では具体的に個々の固有値を求めることは極めて難しいと考えられている。そこで固有値の全体的な振る舞いを見るものとして、固有値のディリクレ型母関数として定義されるスペクトルゼータ関数 $\zeta_Q(s)$ を考える。 $\alpha = \beta$ のとき、スペクトルゼータ関数 $\zeta_Q(s)$ はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ と本質的に等しくなる。つまり $\zeta_Q(s)$ は $\zeta(s)$ の暗示的なパラメータ変形とみなすことが出来る。全平面への解析接続、 $s = 1$ における単純極、自明な零点の存在といったいくつかの性質が $\zeta_Q(s)$ においても $\zeta(s)$ と同様に成り立つ (Ichinose-Wakayama, 2005)。

このスペクトルゼータ関数の特殊値（正整数点での値）は、おおよそ「リーマンゼータ値 + 剰余項（ $\alpha = \beta$ のとき消える項）」という形の表示を持つ。この「剰余項」が“調和振動子と非可換調和振動子との「ずれ」”を反映する量だと考えられる。 $\zeta_Q(2)$ に対する剰余項は完全楕円積分を用いて書くことが出来、合同部分群 $\Gamma_0(4)$ に対する重さ 1 のモジュラー形式とも密接に関係していて、また $\zeta_Q(4)$ に対する剰余項は保型積分の一般化を与えている。

2. 研究の目的

以上のような背景の下、本研究は以下に示すような事項を明らかにすることを主たる目的に掲げて開始された。

(1) アルファ行列式とリース行列式の不変式論の研究と、その組合せ論への応用

- ① 対称群上の帯球関数の値が消えないための十分条件の探求、および対称群上の帯球関数の値を何らかの特殊関数によって表示する公式の探求
- ② リース行列式とプレズムの関係の理解
- ③ アルファ行列式やリース行列式の極限挙動の研究

(2) 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値、特にその剰余項の研究

- ① 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値における「剰余項」の理解、特に何らかの特殊関数による「剰余項」の具体的記述や、高位のアペリ型数列の理解
- ② アイヒラー形式（剰余項に現れるアイヒラー積分の一般化）の一般論の構築と理解
- ③ 細密化されたアペリ型数列やアペリ型数列の二重母関数の数論的研究

3. 研究の方法

(1) 周辺研究者との議論

本研究課題の対象と関連する研究を行っている、あるいは興味を持ってくれる研究者との議論を行った。研究集会や学会への参加、他研究機関への訪問、研究者の招聘などによってそのような機会を持った。

(2) 計算機の援用

超合同関係式や構造の退化条件に関する予想を立てるため、また検証するための具体例の計算に数式処理ソフト (Maxima, SageMath, Mathematica など) を利用した計算機による実験を積極的に活用した。

4. 研究成果

具体的な成果は以下の通り。

(1) アルファ行列式・リース行列式に関連する研究について

- ① プレシズム（一般線形群の自然表現の対称（交代）テンソル積の対称（交代）テンソル積）の既約分解に関する既知の結果に対して，standard monomial theory に基づいた既約成分の重複度の明示的な計算を行い，組合せ論的な表示を与えた (Kimoto and Lee, 2019).
- ② 有限群とその部分群の対から定まるケーリーグラフの類似について，その固有値を表現論的な情報で表示する結果を与えた (Kimoto, 2019). リース行列式との関係も期待されるが，これについては未解明である.
- ③ リース行列式による対称群上の帯球関数の値の表示や長方形ヤング図形に対応する対称群の既約指標の値の公式 (Stanley の結果の別証明)，リース行列式を用いた Alon-Tarsi 予想の同値命題，行列式の 2 パラメタ変形とその応用などについての結果を論文としてまとめた (Kimoto, 2021).

(2) 非可換調和振動子に関連する研究について

- ① スペクトルゼータ関数の特殊値，その剰余項に現れるアペリ型数列，アペリ型数列の母関数として生じる保型積分の一般化（アイヒラー積分）について総合的に論じた論文が出版された (Kimoto and Wakayama, 2023).
- ② 非可換調和振動子から表現論的な議論によるある種の合流操作を行うことで，量子ラビ模型という相互作用模型が得られる．そのパラメタ変形と言える非対称量子ラビ模型について，パラメタの値が特別な場合に起こる固有値縮退が生じる条件を明示的に与えた (Kimoto, Reyes-Bustos and Wakayama, 2020).
- ③ 非可換調和振動子のアペリ型数列とは異なるタイプのある種のアペリ型数列について，それが満たすと予想される超合同関係式について研究を進めた (University College Dublin の Robert Osburn との共同研究)．議論の過程で生じた技術的な結果の副産物を論文としてまとめた (Kimoto, 2022).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Kazufumi Kimoto	4. 巻 34
2. 論文標題 Wreath determinants, zonal spherical functions on symmetric groups and the Alon-Tarsi conjecture	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Ryukyu Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 5-19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kimoto Kazufumi, Reyes-Bustos Cid, Wakayama Masato	4. 巻 -
2. 論文標題 Determinant Expressions of Constraint Polynomials and the Spectrum of the Asymmetric Quantum Rabi Model	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnaa034	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kimoto Kazufumi	4. 巻 33
2. 論文標題 Generalized Group-Subgroup Pair Graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematics for Industry	6. 最初と最後の頁 169 ~ 185
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-981-15-5191-8_14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kazufumi Kimoto and Soo Teck Lee	4. 巻 -
2. 論文標題 Highest Weight Vectors in Plethysms	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-019-03639-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kazufumi Kimoto	4. 巻 35
2. 論文標題 Linear relations for Bernoulli numbers and its application to congruences involving harmonic sums	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Ryukyu Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1-11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kazufumi Kimoto and Masato Wakayama	4. 巻 10
2. 論文標題 Apery-like numbers for non-commutative harmonic oscillators and automorphic integrals	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Henri Poincaré; D	6. 最初と最後の頁 205-275
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/AIHPD/129	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 木本一史
2. 発表標題 行列式のパラメタ変形と表現論
3. 学会等名 2021年度表現論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 木本一史・若山正人
2. 発表標題 非可換調和振動子に現れるモジュラー性
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 木本一史
2. 発表標題 完全グラフの正規化ラブラシアン行列に対するアルファ行列式の極限挙動
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kazufumi Kimoto
2. 発表標題 Generalized group-subgroup pair graphs
3. 学会等名 International Symposium on Mathematics, Quantum Theory, and Cryptography (MQC 2019) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Tsuyoshi Takagi, Masato Wakayama, Keisuke Tanaka, Noboru Kunihiro, Kazufumi Kimoto, Yasuhiko Ikematsu	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Springer, Singapore	5. 総ページ数 274
3. 書名 International Symposium on Mathematics, Quantum Theory, and Cryptography	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Zeta Functions in OKINAWA 2019	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Zeta Functions in OKINAWA 2022	開催年 2022年～2022年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------