

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 18 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03256

研究課題名(和文) 野性的指標多様体の基礎理論構築

研究課題名(英文) Theoretical foundations on wild character varieties

研究代表者

山川 大亮 (Yamakawa, Daisuke)

東京理科大学・理学部第一部数学科・准教授

研究者番号：20595847

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：コンパクトリーマン面上のモノドロミー・ストークスデータの安定性と、対応するストークス表現の既約性が同値であり、一方多重安定性は、対応する有理型接続の微分ガロア群の線形簡約性と同値であることを証明した。また底空間がリーマン球面で特異点が1点の場合に、野性的指標多様体(=モノドロミー・ストークスデータのモジュライ空間)の次元がある格子上的2次形式によって記述され、更にその2次形式が種々の重要な例においてカツ・ムーディ代数のカルタン行列が定める2次形式と関係していることを発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究によって、モノドロミー・ストークスデータやそのモジュライ空間である野性的指標多様体について理解が進み、複素領域上の線形常微分方程式の理論だけでなく、ゲージ理論、表現論、可積分系等の関連分野に貢献することができた。また「研究成果の概要」欄で述べた安定性・多重安定性に関する研究成果を得る過程において、幾何学的不変式論における既知の結果の拡張も行っており、これによって同分野の発展にも寄与したと考えている。

研究成果の概要(英文)：We proved that a monodromy/Stokes datum on a compact Riemann surface is stable if and only if the corresponding Stokes representation is irreducible, while it is polystable if and only if the differential Galois group of the corresponding meromorphic connection is linearly reductive.

Also, in the case where the base space is the Riemann sphere and the number of singularities is equal to one, we described the dimensions of wild character varieties (moduli spaces of monodromy/Stokes data) in terms of some quadratic forms, and found that many important examples of such quadratic forms relate to Kac-Moody Lie algebras.

研究分野：代数幾何学・シンプレクティック幾何学

キーワード：野性的指標多様体 モノドロミー・ストークスデータ 安定性 多重安定性 ストークス表現 線形常微分方程式 有理型接続 微分ガロア群

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

コンパクトリーマン面 X 上の有理型関数を係数に持つ線形常微分方程式が与えられると、その局所解の解析接続の様子を記述するものとしてモノドロミー・ストークスデータと呼ばれるものが得られる。このデータは特別な条件を満たすいくつかの行列からなり、一般に線形常微分方程式は特異点集合 D 、不確定型 Q (局所解の指数関数的な漸近挙動を決めるデータ)、モノドロミー・ストークスデータによって分類することができる。そのためモノドロミー・ストークスデータは線形常微分方程式の構造を調べる上で基本的な数学的对象であり、古くから多くの研究がなされてきた。三つ組 (X, D, Q) を固定した上で線形常微分方程式を連続的に変形すれば、得られるモノドロミー・ストークスデータも連続的に変形する。研究代表者、および研究協力者である Philip Boalch 氏 (パリ・シテ大学、ソルボンヌ大学) は、このようなモノドロミー・ストークスデータの変形を普遍的にパラメータ付ける空間 (モジュライ空間) である野性的指標多様体 $M(X, D, Q)$ を導入した。

野性的指標多様体は多くの数学・物理学分野と関わりを持つ重要な対象であるが、その構成は複雑であるため、野性的指標多様体に関する事実の中には不確定型または構造群が特別な場合にしか確かめられていないことがいくつか存在していた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、多分野と密接に関わりを持つ野性的指標多様体の幾何学的な構造・性質を解明することであった。そのために、代数幾何学及びシンプレクティック幾何学の立場から、野性的指標多様体の構成から派生する基本的な問題の解決、および野性的指標多様体の自然な特異点解消の構成を行うことを目標としていた。

3. 研究の方法

(1) 野性的指標多様体 $M(X, D, Q)$ は、あるアフィン代数多様体 Z の G によるアフィン商 $Z//G$ として構成されている。従って Mumford の幾何学的不変式論を用いることにより、モノドロミー・ストークスデータに対し安定性条件を導入することができる。一方、ある方法で固定された (X, D, Q) から境界付き (非コンパクト) 曲面を作り、各境界成分から基点を一つずつ取れば、モノドロミー・ストークスデータを基点付き曲面の基本亜群の特別な表現 (ストークス表現) として解釈することができる。不確定型が「不分岐」と呼ばれる良い条件を満たす場合、モノドロミー・ストークスデータの安定性と対応するストークス表現の既約性は同値であるため、この事実を一般の場合に拡張する。そのために幾何学的不変式論に関する Richardson の結果を拡張する。

(2) 線形常微分方程式が与えられると、その微分ガロア群と呼ばれる構造群 G の部分群が定まる。不確定型が不分岐な場合、モノドロミー・ストークスデータが多重安定であることと、対応する線形常微分方程式から定まる微分ガロア群が線形簡約であることは同値である。この事実を一般の場合に拡張する。

(3) X が複素射影直線で不確定型が不分岐の場合、線形常微分方程式のモジュライ空間を野性的指標多様体のある種の「加法的」類似物として構成し、自然なポアソン構造を定めることができる。更に、そのモジュライ空間から野性的指標多様体への自然な写像 (リーマン・ヒルベルト・パーコフ写像) がポアソン構造を保つことを示すことができる。線形常微分方程式のモジュライ空間の構成に関しては Bremer-Sage による先行研究が知られている。彼らが構成したモジュライ空間を観察し、必要であれば修正することで、モジュライ空間から野性的指標多様体へのリーマン・ヒルベルト・パーコフ写像を構成し、その写像がポアソン構造を保つことを示す。

(4) 以前、研究代表者は構造群が一般線形群で不確定型が自明な場合、野性的指標多様体のシンプレクティック葉の特異点解消を (X, D) 上の安定フィルター付き局所系のモジュライ空間として構成した。なおフィルター付き局所系は Simpson が非アーベルホッジ理論の研究の中で導入したものである。Philip Boalch 氏はフィルター付き局所系の概念を不確定型が非自明な場合に拡張しており (フィルター付きストークス局所系)、当然そのモジュライ空間について同じことが成立すると期待される。そこでフィルター付き安定ストークス局所系のモジュライ空間を構成し、それが野性的指標多様体の特異点解消を与えることを示す。

4. 研究成果

(1) 研究協力者の Philip Boalch 氏と共に、当初の研究計画で想定していた状況を更に一般化して、コンパクトリーマン面上の有理型接続 (= 有理型関数を係数とする線形常微分方程式) の構造群が複素簡約代数群をファイバーとする群の局所系になっている状況を考察した。ただしその局所系が有限なモノドロミー群をもつと仮定した。この場合に、モノドロミー・ストークスデータのマンフォード安定性と、対応するストークス表現の既約性が同値であることを示した。

この同値はこれまで構造群の局所系が自明で有理型接続の不確定型が不分岐な場合にしか示されておらず、それを大幅に拡張したことになる。マンフォード安定なモノドロミー・ストークスデータは野性的指標多様体の点として高々有限群による商特異点を与えるため、野性的指標多様体の構造を理解する上で重要な対象である。これによって野性的指標多様体の理解がより深まった。

(2) 研究協力者の Philip Boalch 氏と共に、コンパクトリーマン面上のモノドロミー・ストークスデータの多重安定性と、対応する有理型接続の微分ガロア群の線形簡約性の関係を考察し、これらが同値であることを証明した。更にこの結果を有理型接続の構造群が複素簡約代数群をファイバーとする群の局所系になっている場合に拡張した。ただしその場合、微分ガロア群そのものではなく、その群のある剰余群の線形簡約性が多重安定性と同値な条件になる。この同値はこれまで構造群の局所系が自明で有理型接続の不確定型が不分岐な場合にしか示されておらず、それを大幅に拡張したことになる。

(3) モノドロミー・ストークスデータは、境界付き実曲面からいくつか穴をあけたものの上の G 局所系で、更に穴の除外近傍上、あるトラスの局所系の作用を備えたものとして捉えることができる。そこでこのような局所系を一般に次数付き G 局所系と呼ぶことにし、次数付き局所系の既約性・完全可約性に関する一般論を構築することで、モノドロミー・ストークスデータの安定性・多重安定性に関する理論を整理した。これによりモノドロミー・ストークスデータの安定性に関するこれまでの結果がより明瞭に理解されるようになった。

(4) 底空間がリーマン球面で特異点が 1 点の場合に、モノドロミー・ストークスデータのモジュライ空間（野性的指標多様体）の次元を研究協力者の Philip Boalch 氏と共に観察し、それがある格子上的 2 次形式によって記述され、更にその 2 次形式が種々の重要な例においてカツツ・ムーディ代数のカルタン行列が定める 2 次形式と関係していることを発見した。

(5) リーマン球面において無限遠点でポアンカレ階数 2 以下の不分岐不確定特異点を持ち、他でただか確定特異点をもつ（1 階連立）線形常微分方程式のモノドロミー保存変形について、変形を記述する非自励ハミルトン系の正準量子化を考察した。このクラスのモノドロミー保存変形は 3 種類の変形パラメータをもつ。1 つは線形常微分方程式の係数行列を無限遠点においてローラン展開したときの先頭係数の固有値であり、もう 1 つは 2 番目の係数に関わるパラメータ、そして最後の 1 つは確定特異点の位置である。その内先頭係数の固有値以外の変形パラメータに関するハミルトニアンの量子化を構成した。構成には Talalaev の量子スペクトル曲線法と、マニン行列（非可換環に成分を持ち、成分同士がある特別な条件を満たす行列）に対する行列式の理論、そしてこのクラスの線形常微分方程式がもつ特別な対称性（本質的にラプラス変換によって生成される）を用いる。この結果は本質的には 2015 年に得られており、アナウンスも行っていたが、今回改めて構成過程での証明を見直し、完成度を高めることができた。なお同じ結果が 2019 年に Rembado により得られているが、構成法は全く異なる。

(6) 研究協力者の寺田涼氏（東京理科大学）と共に、Hausel-Wong-Wyss によって導入されたクイバー概型を考察し、そのワイル群対称性を構成した。このワイル群対称性は特別な場合に一部の野性的指標多様体の対称性と関係している。また 2024 年 3 月に研究協力者の伊藤要平氏（東京理科大学）、稲場道明氏（京都大学）、廣恵一希氏（千葉大学）と共に、東京理科大学において研究集会「パウルヴェ方程式の幾何学とその周辺」を開催し、関連分野の研究者と情報交換を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Yamakawa Daisuke	4. 巻 4
2. 論文標題 Fundamental two-forms for isomonodromic deformations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Integrable Systems	6. 最初と最後の頁 1~35
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/integr/xyz009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Boalch Philip, Yamakawa Daisuke	4. 巻 358
2. 論文標題 Diagrams for nonabelian Hodge spaces on the affine line	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Comptes Rendus. Mathematique	6. 最初と最後の頁 59~65
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/crmath.11	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 7件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 山川 大亮
2. 発表標題 モノドロミー保存変形の幾何学と対称性
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daisuke Yamakawa
2. 発表標題 Stokes local systems and wild character varieties
3. 学会等名 Gauge Theory, Moduli Spaces and Representation Theory, Kyoto 2023（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 山川 大亮
2. 発表標題 ストークス・モノドロミーデータの安定性と微分ガロア群
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 山川 大亮
2. 発表標題 リーマン・ヒルベルト・パーコフ対応と野性的指標多様体
3. 学会等名 早稲田大学数学若手異分野交流会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山川 大亮
2. 発表標題 Symmetries of quiver schemes
3. 学会等名 Web-seminar on Painleve Equations and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 山川 大亮
2. 発表標題 クイバースキーム
3. 学会等名 パンルヴェ方程式の幾何学とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 山川 大亮
2. 発表標題 野性的指標多様体のポアソン構造
3. 学会等名 大阪大学幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>東京理科大学 研究者情報データベース https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01.php</p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ボールチ フィリップ (Boalch Philip)		
研究協力者	寺田 涼 (Terada Ryo)		
研究協力者	稲場 道明 (Inaba Michi-aki)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	廣惠 一希 (Hiroe Kazuki)		
研究協力者	伊藤 要平 (Ito Yohei)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
フランス	Universite Paris Cite	Sorbonne Universite	IMJ-PRG