

令和 6 年 6 月 21 日現在

機関番号：35302

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03263

研究課題名（和文）平面代数曲線の埋め込み位相の研究の新展開

研究課題名（英文）New developments in the study of the embedded topology of plane algebraic curves

研究代表者

坂内 真三（Bannai, Shinzo）

岡山理科大学・理学部・准教授

研究者番号：20732556

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本課題では平面代数曲線の埋め込み位相に関する研究を行なった。特に、平面曲線のどのような代数的特徴が位相的な差異を生むのかや、複雑な代数的特徴をより扱いやすく記述する方法について研究した。その結果、これまで使用されていた「分解型」と呼ばれる不変量と two-graph や曲線の Jacobian の擦れ元との関係を見出すことが出来た。また、これらの応用として、新たな興味深い曲線配置の例を多く発見することが出来た。さらにこれらの研究結果をまとめた計10本の論文が査読付き論文雑誌に掲載され、外国の研究者との国際共同研究の発展にもつながった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

平面代数曲線の埋め込み位相の研究における究極的な目標は、完全な分類を与えることであるが、現時点では目標の到達には程遠いのが現状である。本研究の成果により、直接扱うのが難しい曲線の位相的な特徴を代数的な特徴として捉え、さらには代数的な差異を今までより簡明に記述することができるようになった。その結果、これまで位相的な特徴が把握できていなかった曲線についての理解が進み、次数が低い曲線のある程度扱うことができる様になり、大目標へ僅かではあるが近づくことが出来た。

研究成果の概要（英文）：In this project, the embedded topology of algebraic plane curves was studied. The main interest was in what kind of algebraic properties of plane curves lead to differences in the embedded topology, and how can we describe the subtle differences in the algebraic properties in a more manageable way. As a result, the relation between the formerly used invariant called "splitting types" and concepts such as two-graphs and the torsion points of Jacobians were found. Also, as an application many new interesting curve arrangements were found.

These results were compiled into 10 papers, published in refereed research journals and lead to joint international research with researchers from abroad.

研究分野：代数幾何学

キーワード：Zariski pair plane algebraic curves curve arrangements embedded topology

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

平面代数曲線の埋め込み位相の研究は、O. Zariski が 1929 年に発見した、次数や特異点の型などの組み合わせ論的情報は一致しているが、埋め込み位相が異なる曲線の組から始まった。そのような曲線の組は E. Artal により Zariski pair と名付けられた。この方面の研究の究極的な目標は、平面曲線を埋め込み位相の観点で分類することにあるが、Zariski pair が生じる原理を理解することが、曲線を分類するにあたり有用であると考えられ、多くの数学者が興味を持って Zariski pair の研究を行っている。初期は、位相幾何学由来の不変量が主に使われていたのに対し、次の段階として代数的な不変量が導入され始めているところであるが、扱う情報量が多く複雑であったり、対象となる曲線がある意味で限定的であったり、代数的な不変量をより有効に扱うにあたり改善・発展の余地があった。どのような代数的な特徴が曲線の埋め込み位相に影響を及ぼすかについての理解の深化や、位相的な差異を捉えるのに有効な代数的特徴を記述する一般的な方法の開発、代数的な不変量を定義できる曲線の範囲の拡大などの課題が研究開始当初にあった。

2. 研究の目的

平面曲線のトポロジーの研究において、埋め込み位相の観点からの分類は究極な目標であるが、実現困難な目標でもある。本研究の目的は、比較的簡単な次数の低い場合について主に考察し、少しでも埋め込み位相についての理解を深化させることにある。特に、平面曲線の微妙な代数的差異を捉える取り扱いやすい方法を開発し、それをもとにしてどのような代数的特徴が埋め込み位相に影響を与えるかを考察し、Zariski pair のような現象が生じる理由を探ることを目指す。これまでの研究では、曲線の代数的な差異が各個的に記述されていたため、それをより統一的に扱う枠組みを模索し、さらに他分野の手法を導入することでより広い範囲の曲線を扱えるようにすることを目指す。また、splitting type をはじめとする分解型不変量に注目して研究を行い、平面曲線の埋め込み位相の観点からの分類を進展させることを目指す。

3. 研究の方法

本研究ではまず、これまで蓄積されてきた各個的に扱われてきた様々な Zariski pair の例を見直す。特に非特異 4 次曲線とその 2 重接線からなる配置について考える。非特異 4 次曲線 Q は 28 本の 2 重接線 L_1, \dots, L_{28} を持つが、 Q と 2 重接線のうち k 本からなる曲線配置について $k \geq 3$ の場合に Zariski pair が存在していることが知られているが、 k の値が大きい場合の詳細な状況は調べきれていない。この場合、位相型を区別するのにあたり Q に付随して得られる有理楕円曲面の Mordell-Weil 格子の情報が必要であったが、 k の値が大きい場合は情報量が多くなり、取り扱いが煩雑になることが見込まれる。そこで、Mordell-Weil 格子の代替となるものを模索し、マトロイドなどの概念を導入するなどして、情報を簡潔化することにより k の値が大きい場合の詳細について調べる。

次に、超平面配置の研究で扱われている対数的ベクトル場の観点での代数的な差異が位相的な差異に寄与するかを検討する。これまで知られている Zariski pair の例について、Maple, Sage, Macaulay 2 などの計算機代数システムを利用して、対数的ベクトル場の状況を計算する。これらの具体例に対する計算の結果をもとに考察を進める。

上記の新規の方向性と並行して従来の手法での新たな Zariski pair の探索を継続する。上記の針が上手くいかない場合は、他の手法も考察するが、他の研究者と研究相談などを行うなどして候補となる新たな手法について模索をする。

4. 研究成果

本課題の成果として、10 本の論文が査読付き論文雑誌に掲載された。また、本研究に関する学術講演を 14 件（うち国際研究集会 4 件）行った。

- (1) 以下の 3 本は非特異 4 次曲線とその 2 重接線からなる配置に関する論文であり、マトロイドを始めとする組み合わせ論的な概念を導入し、代数的な差異を記述する方法について研究した論文である。

[1] A note on the topology of arrangements for a smooth plane quartic and its bitangent lines, Hiroshima Math. J., 49-2 (Jul.2019), pp.289-302

この論文は非特異 4 次曲線と 3 本の 2 重接線からなる配置の Zariski pair の存在を splitting invariant の観点から示した論文であり、[2], [3] の研究の出発点となった論文である。

[2] The matroid structure of vectors of the Mordell-Weil lattice and the topology of plane quartics and bitangent lines, Monogr. Semin. Mat. Garcia Galdeano 42,

この論文は、非特異4次曲線の28本の2重接線に、4次曲線に付随する楕円曲面のMordell-Weil格子の元を対応させ、その元が作るマトロイドの構造を持って代数的な差異を記述し、Zariski pairの分類を行った論文である。複雑な情報を比較的簡潔に表現できるようになった。

[3] Two-graphs and the embedded topology of smooth quartics and its bitangent lines, *Canad. Math. Bull.* 63 (2020), no.4, 802-812.

この論文は、[2]と同様に2重接線にMordell-Weil格子の元を対応させたうえで、自然にtwo-graphの構造が導入されることを示し、それをういてZariski pairの分類を行った論文である。マトロイドを用いる場合よりも細かい分類を実行することが可能となった。

- (2) 以下の2本の論文は可約な4次曲線と、それに付随する楕円曲面を用いる従来の手法を発展させた論文である。

[4] Rational points of elliptic surfaces and the topology of cubic-line, cubic-conic-line arrangements, *Hokkaido Math. J.*, Vol. 49 (2020), p.87-108

既約成分の次数が3次以下の新たなZariski pairを発見した論文である。

[5] Elliptic surfaces of rank one and the topology of cubic-line arrangements, *J. Number Theory* 221 (2021), 174-189

4次曲線に付随する楕円曲面のMordell-Weil格子の階数が1の場合について、splitting typeを簡単に計算する公式を与え、新たなZariski pairを提示した論文である。

- (3) 以下の2本の論文は、楕円曲面を関数体上の楕円曲線として捉え、その上で因子を表現・計算するためのMumford representationの新たな応用として、Zariski pairを含む興味深い曲線配置を構成した論文である。

[6] Trisections on certain rational elliptic surfaces and families of Zariski pairs degenerating to the same conic-line arrangement, *Geom. Dedicata* 216(2022), no.1, Paper No. 8, 23 pp.

楕円曲面の3重切断を、関数体上の楕円曲線の3次の因子とみなし、Mumford representationを応用することで新たなZariski pairの族を見出した論文である。また、そのZariski pairの族の退化の様子を解析し、同一の配置に退化することも示した。

[7] Ramified and split models of elliptic surfaces and bitangent lines or quartics, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* Vol. 71 (2023), pp.51-69

楕円曲面を関数体上の楕円曲線とみなす時のモデルの選び方の違いに注目し、相互関係を解析することで、4次曲線の2重接線の幾何学を研究した論文である。特に、2重接線が共線になる場合の配置についての結果が得られた。

- (4) 以下の3本の論文は代数的差異を記述する新たな枠組みとして、曲線のJacobianの捩れ元を用いる手法を導入した論文である。多数の新規のZariski pairを発見することができた。

[8] Zariski tuples for a smooth cubic and its tangent lines, *Proc. Japan Acad., Ser. A Math. Sci.* 96 (2020), no.2, pp18-21

楕円曲線の接線の組みと楕円曲線の位数2の元の対応関係を用い、代数的な差異を楕円曲線の点の性質で記述をする手法を導入し、新たなZariski pairを見出した論文である。

[9] Torsion divisors of plane curves with maximal flexes and Zariski pairs, *Math. Nachr.* 296 (2023), no.6, 2214-2235.

接触次数が取りうる最大となる接線を持つ非特異曲線 C に注目し、 C を含む曲線配置の代数的な差異を、 C のJacobianの言葉で記述する手法を導入した論文であり、新たなZariski pairを見出した論文である。さらに、3次曲線と6本の直線からなる配置のモジュライ空間の解析も行い、連結成分の個数などを決定した。

[10] Torsion divisors of plane curves and Zariski pairs, *St. Petersburg Math. J.* 34(2023), no.5, 721-736

一般の非特異曲線 C に対して、[9]と同様の手法で代数的な差異を記述した論文である。Jacobianを用いた手法がある程度一般的な状況で通用することが示された。

対数的ベクトル場については、代数的な差異を表現することができることがわかったが、計算の結果埋め込み位相との直接的な関連はないことが判明した。

総合的な成果として、低い次数の曲線からなる配置の埋め込み位相の理解が進んだ。また、[6], [9]などで、Zariski pair の族とその退化についてや、指定された組み合わせ型を持つ曲線全体のモジュライ空間などの新たに研究をする必要のある対象が見つかった。また、[8], [9], [10]で見出された曲線の Jacobian との関係も発展させる余地がまだまだあり、今後の研究の展開の幅が広がった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Artal Bartolo E., Bannai Sh., Shirane T., Tokunaga H.	4. 巻 34
2. 論文標題 Torsion divisors of plane curves and Zariski pairs	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 St. Petersburg Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 721 ~ 736
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/spmj/1776	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Bannai S., Kawana N., Masuya R., Tokunaga H.	4. 巻 216
2. 論文標題 Trisections on certain rational elliptic surfaces and families of Zariski pairs degenerating to the same conic-line arrangement	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10711-021-00672-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Bannai Shinzo, Tokunaga Hiro-o	4. 巻 221
2. 論文標題 Elliptic surfaces of rank one and the topology of cubic-line arrangements	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 174 ~ 189
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2020.06.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Artal Bartolo Enrique, Bannai Shinzo, Shirane Taketo, Tokunaga Hiro o	4. 巻 296
2. 論文標題 Torsion divisors of plane curves with maximal flexes and Zariski pairs	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 2214 ~ 2235
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.202000319	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bannai Shinzo, Ohno Momoko	4. 巻 63
2. 論文標題 Two-graphs and the Embedded Topology of Smooth Quartics and its Bitangent Lines	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 802 ~ 812
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/S0008439520000053	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Bannai Shinzo, Tokunaga Hiro-o	4. 巻 96
2. 論文標題 Zariski tuples for a smooth cubic and its tangent lines	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 18-21
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/pjaa.96.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 R. Sato, S. Bannai	4. 巻 42
2. 論文標題 The matroid structure of vectors of the Mordell-Weil lattice and the topology of plane quartics and bitangent lines	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Monografias Matematicas Garcia de Galdeano	6. 最初と最後の頁 265 ~ 274
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 BANNAI Shinzo, TOKUNAGA Hiro-o, YAMAMOTO Momoko	4. 巻 49
2. 論文標題 Rational points of elliptic surfaces and the topology of cubic-line, cubic-conic-line arrangements	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 87-108
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/1591085013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Bannai Shinzo, Tokunaga Hiro-o, Yamamoto Momoko	4. 巻 49
2. 論文標題 A note on the topology of arrangements for a smooth plane quartic and its bitangent lines	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 289-302
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32917/hmj/1564106549	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Bannai Shinzo, Tokunaga Hiro-o, Yorisaki Emiko	4. 巻 71
2. 論文標題 Ramified and split models of elliptic surfaces and bitangent lines of quartic curves	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli	6. 最初と最後の頁 51-69
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14992/0002000760	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 坂内 真三
2. 発表標題 Splitting invariants and a μ_2 -equivalent Zariski-pair of conic-line arrangements
3. 学会等名 城崎代数幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 坂内 真三
2. 発表標題 Ramified and split models of rational elliptic surfaces and the geometry of quartics and bitangent lines
3. 学会等名 第26回代数曲面論ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 坂内 真三
2. 発表標題 Splitting invariants and a μ_1 -equivalent Zariski-pair of conic-line arrangements
3. 学会等名 神戸代数幾何学ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 寄崎 恵美子, 坂内 真三, 徳永浩雄
2. 発表標題 Ramified and Split models of rational elliptic surfaces and bitangent lines for a quartic curve
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 白根 竹人, M. Amram, 坂内 真三, U. Sinichkin, 徳永 浩雄
2. 発表標題 Splitting invariants and a μ_1 -equivalent Zariski pair of conic-line arrangements
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 坂内 真三
2. 発表標題 射影平面曲線の埋め込み位相の分類問題とその展開
3. 学会等名 徳島大学数学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 坂内 真三
2. 発表標題 射影平面曲線の埋め込み位相の分類問題
3. 学会等名 半田山・幾何・代数セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shinzo Bannai
2. 発表標題 The topology of cubic-line arrangements
3. 学会等名 Geometries in Pyrenees（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shinzo Bannai
2. 発表標題 Torsion divisors of plane curves and Zariski pairs
3. 学会等名 第17回代数曲線論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shinzo Bannai
2. 発表標題 Torsion divisors of plane curves and Zariski pairs
3. 学会等名 湯布院代数幾何学ワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 白根竹人, E.Artal Bartolo, 坂内 真三, 徳永 浩雄
2. 発表標題 Torsion divisors of plane curves and Zariski pairs
3. 学会等名 日本数学会 2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 S. Bannai
2. 発表標題 Matroids, two-graphs and the embedded topology of quartics and bitangent lines
3. 学会等名 Universidad Complutense Madrid, Seminario de Algebra, Geometria y Topologia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Bannai
2. 発表標題 Matroids, two-graphs and the embedded topology of quartics and bitangent lines
3. 学会等名 Fifteenth International Conference Zaragoza-Pau on Mathematics and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Bannai
2. 発表標題 The realization space of a certain conic line arrangement of degree 7 and a 1-equivalent Zariski pair
3. 学会等名 Workshop on Algebraic Geometry and Topology 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会	開催年
第8回 代数幾何学研究集会 宇部	2024年～2024年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
スペイン	University of Zaragoza			
イスラエル	Shamoon College of Engineering	Tel Aviv University		