

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03265

研究課題名（和文）離散と連続の可積分幾何の融合

研究課題名（英文）Fusion of discrete and smooth integrable geometry

研究代表者

小林 真平（Kobayashi, Shimpei）

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：40408654

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：変分問題として定式化される停留曲面や調和写像の研究を行った。特に、無限次元の対称性をもつような可積分曲面に対する総合的な研究とその離散化の定式化を行った。主な成果として、平均曲率一定曲面の離散化を従来のものよりも大幅に拡張し、一般のグラフ上において定式化した。また、極小ラグランジアン曲面、ハイゼンベルグ群内の極小曲面、デモラン曲面など種々の可積分曲面に対して、ガウス写像の調和性を通じた総合的な研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

変分問題として定式化される停留曲面は、シャボン玉をはじめ現実世界によく見られる重要な曲面である。本研究は、停留曲面のうち、いわゆる無限次元の対称性をもつ可積分曲面の微分幾何学的研究であり、その離散化についても研究した。離散的な曲面は、近年工学や建築学などの「ものづくり」で非常に注目される対象であり、本研究では、平均曲率一定曲面（体積一定の条件下、面積汎関数の停留曲面である）の離散化を従来より広い枠組みで定式化した。今後、この定式化を用いてさまざまな分野への応用が期待できる。

研究成果の概要（英文）：I studied on stationary surfaces and harmonic maps formulated as variational problems. Specifically, I comprehensively studied integrable surfaces with infinite-dimensional symmetries and formulated their discretization. My research significantly extended the conventional approach to discretizing constant mean curvature surfaces and formulated it on a general graph. I also conducted a comprehensive study of various integrable surfaces, such as minimal Lagrangian surfaces, minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg groups, and Demoulin surfaces, through harmonicities of Gauss maps.

研究分野：微分幾何学

キーワード：調和写像 可積分系 離散曲面 ガウス写像 離散平均曲率一定曲面 極小曲面 ハイゼンベルグ群
統計多様体

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

変分問題として定式化される停留曲面や調和写像の研究は、良い対称性を持つ場合可積分系で特徴付けられる。これらの曲面は可積分曲面と呼ばれ、対称空間への調和写像で特徴付けられる事が多く、無限次元リー群のループ群を用いたワイエルシュトラス型の表現公式(正則関数の組を用いた表現公式)を持ち、様々な研究が為されてきた(引用文献)。一方、可積分系は自然に離散化され、連続の場合と同様の重要性を持ち様々に研究されている。しかしながら、対応する離散の曲面(離散可積分曲面)の研究は、工学・建築学へも応用ができる重要な研究対象であるにもかかわらず、なかなか展開できていない。その理由の大きな部分は、曲率等の概念の離散化に対応するものが複数ありえる事、また基本的な性質が未解明であることに起因している。

2. 研究の目的

本研究では、隠れた対称性を表す代数構造としてのループ群を用いて、連続と離散の可積分幾何の研究を行う。特に良い性質を持つ停留曲面の離散化の幾何学的定式化を与え、離散的なワイエルシュトラス型の表現公式の確立する。また、ループ群を通して、連続と離散の可積分曲面や調和写像との関連を調べ統一的な理解を目指す。また、種々の可積分曲面、調和写像に関する総合的な研究を行う。

3. 研究の方法

停留曲面の離散化の候補としては、平均曲率一定曲面(体積一定の条件の下の面積汎関数の極値)が考えられる。すでに Bobenko と Pinkall によって離散平均曲率一定曲面の定式化は得られている(引用文献)が、これは \mathbb{Z}^2 格子上で定義されているものである。これをより一般のグラフに通用する形にすることを目標にする。また、別の離散可積分曲面に対するワイエルシュトラス型の表現公式を確立する。

種々の可積分曲面(極小ラグランジアン曲面、ハイゼンベルグの極小曲面、デモラン曲面)に対してループ群の手法を適用し、それぞれの曲面に対しての総合的な研究を行う。また、その他、停留曲面や統計多様体に関する研究も行う。

4. 研究成果

研究期間全体を通じて、計 11 本の査読論文を国際誌に出版することができた。内容は多岐にわたり、大きく分けて(1)離散微分幾何に関して2本、(2)ガウス写像と曲面に関する論文6本、(3)その他関連する研究(統計多様体やアフィン平面曲線)に関して3本となっている。以下でそれぞれに詳しく述べる。

- (1) 離散微分幾何：本研究課題の最大の目的であった、離散可積分曲面については、ミュンヘン工科大学の Tim Hoffmann 教授とその大学院生 Zi Ye 氏との共同研究によって、一般のグラフにおいて、平均曲率一定曲面の離散化の概念を定式化した。この定義は、従来の定義の自然な拡張になっており、その適用範囲は幅広い。さらに、この新しい離散平均曲率一定曲面に対して、自然とループ群の手法が適用できることを示し、最終的にはワイエルシュトラス型の表現公式を確立した。この中で、用いた動標構は離散可積分系の研究で広く用いられている Bobenko-Suris(参考文献)のものと一致しており、その意味でも自然な拡張である。今後この表現公式を用いて重要な例を構成するのが課題である。また、離散可積分曲面である離散アフィン球面について、久留米工業大学の松浦望教授とともに、ワイエルシュトラス型の表現公式を確立し、いくつかの例も構成した。
- (2) ガウス写像と曲面：種々の可積分曲面の研究には付随するガウス写像を考えることが重要であり、本質的である。ミュンヘン工科大学の Josef Dorfmeister 教授と共に 2 次元不定値複素射影空間内の時間的極小ラグランジアン曲面についてのガウス写像を用いた特徴づけおよびループ群の手法を適用しワイエルシュトラス型の表現公式を得た。時間的曲面は、今まで研究されて来なかった対象で今後重要になっていくと考えられる。次に、2次元複素射影空間内の停留曲面のガウス写像を用いた種々の特徴づけを、清華大学の Hui Ma 教授とミュンヘン工科大学の Josef Dorfmeister 教授とともに行った。ガウス写像は、ある特別な等質空間(k-対称空間と呼ばれる)への写像になっており、この写像の調和性が種々の停留曲面を特徴づけることを示した。また筑波大学の井ノ口順一教授とともに、射影微分幾何学における停留曲面のデモラン曲面のガウス写像を用いた特徴づけを行った。

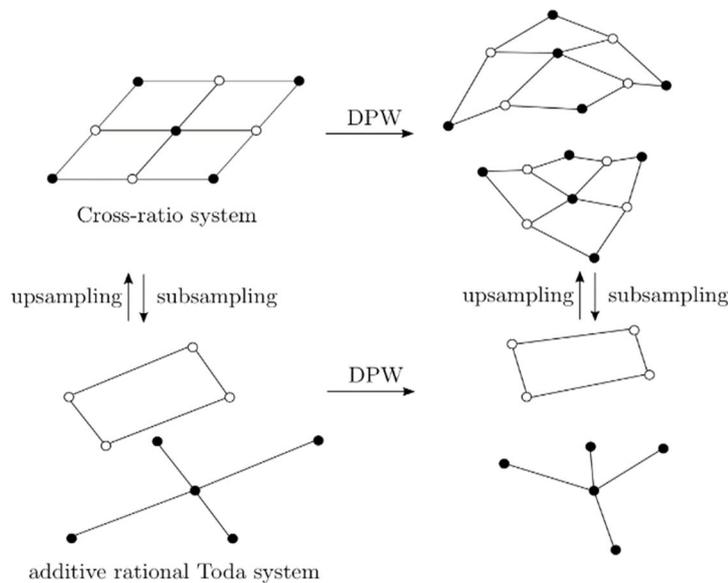


FIGURE 10. The relation between the surfaces over quadrilateral graphs and general graphs

T. Hoffmann, S.-P. Kobayashi, Z. Ye, Discrete constant mean curvature surfaces on general graphs, *Geometrie Dedicata*, **216** (2022), no. 6, Paper No. 71 の図 10 から

また、ミュンヘン工科大学の Josef Dorfmeister 教授、Erxiao Wang 氏、Walter Freyn 氏との共同研究により、 $A_2^{(2)}$ 型の戸田方程式と付随する停留曲面（極小ラグランジアン曲面、アフィン球面など）に関する概説論文を発表した。この中で、アフィンカット・ムーディーリー環の実形が有効に用いられている事を再確認できた。また、近年ハイゼンベルグ群内の極小曲面が可積分曲面であることが示され、活発に研究されてきた（引用文献）。鍵になるのは、正規ガウス写像が対称空間への調和写像になるという事実である。引用文献に引き続き、曲面の大域的な構造を調べる基本的な論文をミュンヘン工科大学の Josef Dorfmeister 教授と筑波大学の井ノ口順一教授とともに発表した。また、大学院生の清原悠貴氏と共に、3次元の不定値ハイゼンベルグ群内の時間的極小曲面に関するワイエルシュトラス型の表現公式と極小曲面の構成を行った。

- (3) その他関連する研究：統計多様体は、リーマン多様体にある両立性を持つ捻じれの無いアフィン接続を導入した対象で、確率分布から定まる情報幾何においてさまざまな概念を説明することに欠かせないものである（甘利俊一氏の研究）。このアフィン接続のなかで、甘利-Chentsov の接続という標準的なものが大切であり、筑波大学の井ノ口順一教授と北海道大学の古畑仁教授とともに正規分布から定まる統計多様体の接続を共役対称性を用いて特徴付けた。また、大学院生の大野優氏とともに、定曲率統計多様体についての一般的な考察を行い発表した。アフィン平面曲線は平面のユークリッド運動群より大きい群が働く興味深い幾何学的対象である。神戸大学の佐々木武名誉教授とともに、一般のファイブ群（2次の一般線形群と \mathbb{R}^2 の半直積の群）に関して、曲率などを定義し、曲率の変分問題等を定式化した（弾性曲線の一般化）。

<引用文献>

- J. Dorfmeister, F. Pedit, H. Wu, Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces. *Comm. Anal. Geom.* **6** (1998), no.4, 633–668.
 A. Bobenko, U. Pinkall, Discrete isothermic surfaces. *J. reine angew. Math.* **475** (1996), 187–208.
 A. Bobenko, Y. Suris, Integrable systems on quad-graphs, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **19** (2002), 573–611.
 J. F. Dorfmeister, J.-I. Inoguchi, S.-P. Kobayashi, A loop group method for minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group. *Asian J. Math.* **20** (2016), no. 3, 409–448.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件／うち国際共著 4件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kobayashi Shimpei, Ohno Yu	4. 巻 5
2. 論文標題 On a constant curvature statistical manifold	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Information Geometry	6. 最初と最後の頁 31 ~ 46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s41884-022-00065-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kiyohara Hirota, Kobayashi Shimpei	4. 巻 32
2. 論文標題 Timelike Minimal Surfaces in the Three-Dimensional Heisenberg Group	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 225
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12220-022-00962-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hoffmann Tim, Kobayashi Shimpei, Ye Zi	4. 巻 216
2. 論文標題 Discrete constant mean curvature surfaces on general graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 71
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10711-022-00733-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Dorfmeister Josef F., Inoguchi Jun-ichi, Kobayashi Shimpei	4. 巻 9
2. 論文標題 Minimal surfaces with non-trivial geometry in the three-dimensional Heisenberg group	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Complex Manifolds	6. 最初と最後の頁 285 ~ 336
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/coma-2021-0141	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hitoshi Furuhashi, Jun-ichi Inoguchi, Shimpei Kobayashi	4. 巻 4
2. 論文標題 A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of normal distributions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Information Geometry	6. 最初と最後の頁 177-188
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s41884-020-00037-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Dorfmeister, Josef F., Kobayashi Shimpei	4. 巻 200
2. 論文標題 Timelike minimal Lagrangian surfaces in the indefinite complex hyperbolic two-space.	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata. Series IV	6. 最初と最後の頁 521--546
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-020-01005-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Dorfmeister Josef F., Kobayashi Shimpei, Ma Hui	4. 巻 296
2. 論文標題 Ruh-Vilms theorems for minimal surfaces without complex points and minimal Lagrangian surfaces in CP^2	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 1751--1775
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-020-02497-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Inoguchi Jun-ichi, Kobayashi Shimpei	4. 巻 -
2. 論文標題 The Gauss maps of Demoulin surfaces with conformal coordinates	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Science China Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11425-020-1738-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Dorfmeister Josef F., Freyn Walter, Kobayashi Shimpei, Wang Erxiao	4. 巻 6
2. 論文標題 Survey on real forms of the complex $A_2(2)$ -Toda equation and surface theory	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Complex Manifolds	6. 最初と最後の頁 194 ~ 227
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/coma-2019-0011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kobayashi Shimpei, Matsuura Nozomu	4. 巻 69
2. 論文標題 Representation formula for discrete indefinite affine spheres	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 101592 ~ 101592
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.difgeo.2020.101592	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kobayashi Shimpei, Sasaki Takeshi	4. 巻 70
2. 論文標題 General-affine invariants of plane curves and space curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Czechoslovak Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 67 ~ 104
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.21136/CMJ.2019.0165-18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Shimpei Kobayashi
2. 発表標題 The generalized Weierstrass type representation for surfaces (1), (2)
3. 学会等名 The 13th MSJ-SI 2020 Mathematical Society of Japan - Seasonal Institute Differential Geometry and Integrable Systems - Mathematics of Symmetry, Stability and Moduli - (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 小林真平, 大野優
2. 発表標題 等質的な統計多様体について
3. 学会等名 ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺 (12) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小林真平
2. 発表標題 不定値複素射影平面の時間的全実極小曲面について
3. 学会等名 北九州幾何学研究集会2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小林真平
2. 発表標題 一般アフィン平面および空間曲線について
3. 学会等名 幾何学コロキウム (北海道大学) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shimpei Kobayashi
2. 発表標題 A real form of $a_2^2(2)$ and timelike minimal Lagrangian surfaces
3. 学会等名 Geometry Seminar at University of Augsburg (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shimpei Kobayashi
2. 発表標題 A real form of $a_2^2(2)$ and timelike minimal Lagrangian surfaces
3. 学会等名 Integrable geometry at Bayrischzell
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shimpei Kobayashi
2. 発表標題 D'Alembert type representation for discrete surfaces
3. 学会等名 SFB Colloquium; Technical University of Berlin (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shimpei Kobayashi
2. 発表標題 Minimal surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group
3. 学会等名 m:iv Summer 2018 Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shimpei Kobayashi
2. 発表標題 General-affine invariants of plane curves and space curves
3. 学会等名 Differential Geometry in honor of Udo Simon's 80th birthday (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小林 真平
2. 発表標題 離散微分幾何学と可積分系
3. 学会等名 日本数学会 北海道支部会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Kobayashi Shimpei's Homepage
<https://sites.google.com/site/kobayashishimpeisite>

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	ミュンヘン工科大学			
デンマーク	デンマーク工科大学			
フランス	グルノーブル大学			
中国	清華大学			